Здесь матрицы A_{kl} непрерывно дифференцируемы порядка m; $A_{kl} = A_{lk}$; C — непрерывная симметричная матрица; Q — непрерывная положительно определенная матрица. Предполагаем, что форма

$$\sum_{k,l=1}^{n} \varphi_k^* A_{kl} \varphi_l > 0.$$

Пусть

$$q = \min_{\partial D} \{\min_{\|\eta\|=1} \eta^* Q^s \eta\}, \quad N = \min_{D\times[t\geq 0)} \{\min_{\|\eta\|=1} \eta^* C \eta\} \max_{D\times[t\geq 0)} \{\max_{\|\psi\|=1} \psi^* A^{-1} \psi\},$$

где Q^s — симметричная часть матрицы Q, $A = \| A_{kl} \|_{k,l=1}^{n}$.

Теорема 3. Если область D выпукла и

$$\left(\frac{F}{nV}\right)^2 \geqslant N \left(\operatorname{arctg} \frac{q}{\sqrt{N}}\right)^{-2},$$

то для решения задачи (10) — (12) выполняется неравенство

$$\Phi(t) \leqslant \Phi(0) \exp\left\{-\frac{2}{c_0} \int_0^t \alpha(t)\, dt\right\}, \tag{13}$$

где

$$\Phi(t) = \iint_D \sum_{k=1}^{m} u_k^2 dD, \quad \alpha(t) > 0, \quad c_0 > 0 — \text{const}.$$

Теорема 4. Если область D невыпукла и

$$\left[\frac{R_0}{R_0 + d_D}\right]^{n-1} \frac{1}{d_D} \geqslant \frac{\sqrt{N}}{2 \operatorname{arctg} \frac{q}{\sqrt{N}}},$$

то для решения задачи (10) — (12) справедливо неравенство (13).

1. *Коробчук И. В.* Об одном геометрическом признаке разрешимости некоторых краевых задач для линейных уравнений эллиптического типа и сильно эллиптических систем второго порядка.— Мат. физика, 1972, вып. 12, с. 67—71.
2. *Скоробогатько В. Я.* Исследование по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Львов : Изд-во Льв. ун-та, 1961.— 125 с.

Луцкий филиал Львовского политехнического института

Поступила в редколлегию 26.02.79

УДК 517.63

О. В. Побережный, Я. Д. Пяныло

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ И УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Проблема численного обращения преобразования Лапласа широко освещена в советской и зарубежной литературе. Наиболее полный обзор работ в этом направлении приведен в работах [1, 2, 8] *. Среди методов, дающих принципиальную возможность численно решить задачу обращения преобразования Лапласа, заслуживает внимания ввиду своей простоты метод, основанный на разложении оригинала по ортогональным многочленам. Однако задачам оценки погрешности и выяснению условий сходимости этого метода посвящено незначительное количество работ [3, 4, 6].

---

* В работе [8] приведена библиография в основном зарубежных авторов по численному обращению преобразования Лапласа и его применениям, охватывающая период 1934—1975 гг.

В настоящей работе для определенного класса оригиналов получены оценки погрешности и условия сходимости приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью ортогональных многочленов, сущность которого состоит в следующем. Искомую функцию-оригинал $f(t)$ представляем рядом

$$f(t) = h(t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n (e^{-\sigma t}), \tag{1}$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^n \sigma F(j\sigma), \tag{2}$$

где $F(p)$ — изображение Лапласа функции $f(t)$; $p_n(x)$ — ортонормированные многочлены на промежутке $[0, 1]$; α_i^n — коэффициенты разложения $p_n(x)$ по степеням x^i; $h(t)$ — весовая функция ортонормированных многочленов; $\sigma > 0$ — свободный параметр.

Таким образом, задача приближенного обращения преобразования Лапласа сведена к вычислению коэффициентов a_n по формуле (2). При этом мы встречаемся с проблемой умножения очень больших чисел α_i^n на очень малые $\sigma F(j\sigma)$. Как известно, в таких операциях теряется точность вычисления [5, 7]. Для устранения этого недостатка выведем асимптотическую формулу для a_n, устанавливаемую следующей теоремой.

Теорема 1. Если непрерывно дифференцируемая функция $f(t)$, $t \in [0, \infty)$ обладает свойствами

$$f(t) \approx \begin{cases} A + Bt^{\gamma} e^{-ut^{\nu}} \ln^q t, & t \to 0, \\ C + Dt^{\delta} e^{-vt} \ln^s t, & t \to \infty, \end{cases} \tag{3}$$

где A, C, γ, δ, ν, q, s — произвольные числа; B, $D \neq 0$, u, $v \geqslant 0$, то при достаточно больших n имеет место асимптотическая формула для a_n при разложении оригинала по смещенным многочленам Якоби

$$p_n(e^{-\sigma t}) = r_n^{-1/2} P_n^{*(\alpha,\beta)}(e^{-\sigma t}), \quad r_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\, 2m\Gamma(2m-n)},$$

$$\begin{aligned} a_n \approx \frac{2}{\sqrt{\pi m r_n}} \Big\{ & A\Gamma(1+i_0)(2m)^{-(1+i_0)} \sin \alpha\pi + B\sigma^{-\gamma}\Gamma(1+i_1)(2m)^{-(1+i_1)} \times \\ & \times \ln^q 4m^2\sigma \left[\sin i_2\pi - \frac{q}{\ln 4m^2\sigma} (\pi \cos i_2\pi + 2\psi(1+i_1) \sin i_2\pi) \right] + \\ & + (-1)^n C\Gamma(1+k_0)(2m)^{-(1+k_0)} \sin(\gamma_0/\sigma - \beta)\pi + (-1)^n D(2/\sigma)^{\delta}\Gamma(1+k) \times \\ & \times \ln^{\delta} 2m \ln^s \left(\frac{2}{\sigma} \ln 2m\right) (2m)^{-(1+k)} \left[\sin k_1\pi - \frac{1}{2\ln 2m} \times \right. \\ & \left. \times (\pi \cos k_1\pi + 2\psi(1+k) \sin k_1\pi) \left(\delta + s/\ln\left(\frac{2}{\sigma}\ln 2m\right)\right)\right] \Big\}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\alpha < \min\left\{\frac{3}{2}, 2\gamma + \frac{3}{2}\right\}, \quad \beta < \begin{cases} 2\gamma_0/\sigma - 1/2, & C \neq 0, \\ 2(\gamma_0 + v)/\sigma - 1/2, & C = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где обозначено: $2m = 2n + \alpha + \beta + 1$, $i_0 = \frac{1}{2} - \alpha$, $i_1 = 2\gamma + i_0$,

$$k_0 = \frac{2\gamma_0}{\sigma} - \beta - \frac{3}{2}, \quad k = \frac{2v}{\sigma} + k_0, \quad k_1 = \frac{\gamma_0 + v}{\sigma} - \beta, \quad i_2 = \alpha - \gamma - q,$$

$$\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x), \quad \Gamma(x) \text{ — гамма-функция.}$$

Предполагаем, что изображение Лапласа $F(p)$ есть аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant \gamma_0$. Отметим, что когда в равенстве (3) $u = 0$, то γ должно удовлетворять неравенству $\gamma > -1$. Это необходимо для существования изображения Лапласа.

Ввиду громоздкости доказательство теоремы 1 не приводим. Оно аналогично доказательству в работе [7].

Теорема 2. Для функции $f(t)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, при достаточно больших значениях $n > N$ погрешность между точным значением $f(t)$ и приближенным $f_N(t)$, полученным путем разложения оригинала по присоединенным многочленам Якоби, устанавливается следующим неравенством:

$$|\Delta f(t)| = |f(t) - f_N(t)| \leqslant \psi_1(\sigma, t)\Big\{\Delta_1 (2N)^{-i_0} + $$
$$+ \Delta_2 (2N)^{-i_1} \ln^q 4N^2\sigma \left[|\sin i_2\pi| + \frac{\Delta_3}{\ln 4N^2\sigma} \right] +$$
$$+ \Delta_4 (2N)^{-k_0} + \Delta_5 (2N)^{-k} \ln^\delta 2N \ln^s \left(\frac{2}{\sigma} \ln 2N \right) \times$$
$$\times \left[|\sin k_1\pi| + \frac{\Delta_6}{\ln 2N} \left(|\delta| + \frac{|s|}{\ln\left(\frac{2}{\sigma}\ln 2N\right)} \right) \right] \Big\}, \qquad (6)$$

$$\alpha < \min\left\{\frac{1}{2}, 2\gamma + \frac{1}{2}\right\}, \; \beta < \begin{cases} 2\gamma_0/\sigma - 3/2, & C \neq 0, \\ 2(\gamma_0 + v)/\sigma - 3/2, & C = 0, \end{cases} \qquad (7)$$

где

$$\psi_1(\sigma, t) = \frac{4}{\pi} \exp\left[\sigma t \left(\frac{\gamma_0}{\sigma} - \frac{\beta}{2} - \frac{3}{4} \right)\right] |1 - \exp(-\sigma t)|^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}};$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2i_0} \Gamma(1 + i_0) |A \sin \alpha\pi|; \quad \Delta_2 = \frac{1}{2i_1} \Gamma(1 + i_1)\, \sigma^{-\gamma} |B|;$$

$$\Delta_3 \doteq |q(\pi \cos i_2\pi + 2\psi(1 + i_1) \sin i_2\pi)|;$$

$$\Delta_4 = \frac{1}{2k_0} \Gamma(1 + k_0) |C \sin(\gamma_0/\sigma - \beta)\pi|;$$

$$\Delta_5 = \frac{1}{2k} \Gamma(1 + k)(2/\sigma)^\delta |D|;$$

$$\Delta_6 = \frac{1}{2} |\pi \cos k_1\pi + 2\psi(1 + k) \sin k_1\pi|.$$

Доказательство теоремы проводится аналогично работе [6].

Отметим, что из соотношений (4), (6) легко получить асимптотические формулы для a_n и соответствующие оценки погрешностей при разложении оригинала по другим смещенным классическим многочленам. Для этого достаточно в формулах (4), (6) положить при разложении оригинала по: а) смещенным многочленам Гегенбауэра — $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$; б) смещенным многочленам Лежандра — $\alpha = \beta = 0$; в) смещенным многочленам Чебышева I рода — $\alpha = \beta = -1/2$; г) смещенным многочленам Чебышева II рода — $\alpha = \beta = 1/2$.

Отметим, что сходимость последовательности приближений $f_N(t)$ к $f(t)$ равносильна возможности разложения $f(t)$ в ряд по смещенным многочленам Якоби [4]. Из теорем, дающих условия, достаточные для возможности такого разложения, легко получить, учитывая класс рассматриваемых оригиналов, условия на параметры, характеризующие функции $f(t)$. В рассматриваемом случае неравенство (5) вместе с предположением непрерывной дифференцируемости функции $f(t)$ и условием $\gamma_0 + v > 0$ (если $\gamma_0 + v = 0$, то $\delta < -1$) обеспечивает сходимость частичной суммы ряда $f_N(t)$ к $f(t)$.

Полагая в формулах (4), (6) $q = s = 0$, $\gamma_0 = 0$, получаем как частный случай результаты работы [6].

1. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление.— М. : Высш. школа, 1975.— 407 с.
2. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа.— М. : Наука, 1974.— 223 с.

3. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Об условиях сходимости и оценке погрешности приближенного обращения преобразования Лапласа при помощи рядов Фурье.— Докл. АН БССР, 1967, 11, № 9, с. 763—766.
4. *Крылов В. И., Скобля Н. С.* Замечание о сходимости и оценке погрешности приближенного обращения преобразования Лапласа при помощи ортогональных многочленов Лежандра и Якоби.— Докл. АН БССР, 1967, 11, № 10, с. 863—866.
5. *Лернер Д. М., Лернер Г. М.* Упрощенный алгоритм обратного преобразования Лапласа.— Радиофизика, 1970, 13, № 4, с. 618—621.
6. *Побережный О. В., Пяныло Я. Д.* Об использовании численного обращения преобразования Лапласа к нестационарным задачам термоупругости для тел с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 45—48.
7. *Цирулис Т. Т., Белов М. А.* Асимптотические методы исследования схемы Папулиса для приближенного обращения преобразования Лапласа.— Учен. зап. Латв. ун-та, 1973, № 292, с. 139—154.
8. *Piessens R. A.* Bibliography on numerical inversion of the Laplace transform and applications.— J. Comput. and Appl. Math., 1975, 1, N 2, p. 115—128.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
07.02.79

УДК 531.12

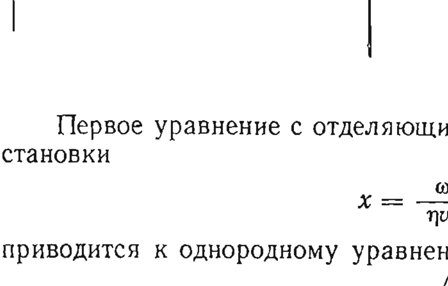
Ю. И. Сикорский, Э. Н. Сокол

ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В КРИВОЛИНЕЙНОМ ТРУБОПРОВОДЕ, РАСПОЛОЖЕННОМ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Линеаризованные дифференциальные уравнения движения материальной точки в расположенном в вертикальной плоскости криволинейном трубопроводе при условии, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, имеют вид [2]

$$\dot{\beta} = \frac{v_0}{\rho(1+\eta v_0 t)}, \tag{1}$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{\eta v_0}{1+\eta v_0 t}\dot{\alpha} + \left[\omega^2 - \frac{v_0^2}{\rho r(1+\eta v_0 t)^2}\right]\alpha = 0, \tag{2}$$



где β, α — обобщенные координаты (см. рисунок); v_0 — начальная скорость движения материальной точки; ρ — переменный радиус кривизны линии, на которой находятся центры поперечных сечений трубопровода; r — радиус внутренней окружности поперечного сечения криволинейного трубопровода; η — коэффициент, учитывающий сопротивление среды; g — ускорение силы тяжести; $\omega^2 = \frac{g}{r}$.

Первое уравнение с отделяющимися переменными, а второе после подстановки

$$x = \frac{\omega}{\eta v_0}(1+\eta v_0 t) \tag{3}$$

приводится к однородному уравнению с переменными коэффициентами

$$x^2\alpha'' + x\alpha' + \left(x^2 - \frac{1}{\eta^2\rho r}\right)\alpha = 0. \tag{4}$$

Интегрируя уравнения (1), получаем

$$\int_0^\beta \rho\, d\beta = \frac{1}{\eta}\ln(1+\eta v_0 t). \tag{5}$$