6. Общий случай сводим к случаю, рассмотренному в п. 5, представляя оператор A в виде прямой суммы оператора $Z(A) \to R(A)^{\perp}$ равного нулю и оператора $Z(A)^{\perp} \to \overline{R(A)}$ равного сужению на $Z(A)^{\perp} \cap D(A)$ оператора A. Аналогично поступаем с оператором B.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 18.01.79

УДК 517.956.4

И. В. Коробчук, П. И. Миронюк

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $D \subset E^n$ — конечная область, ограниченная гладкой поверхностью ∂D. В цилиндре $D \times [t \geqslant 0)$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kl}(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) - \sum_{k=1}^{n} b_k(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_k} - c(t, x)u = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u|_{\partial D} = 0, \qquad (2)$$

$$u(0, x) = f(x), \qquad (3)$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\frac{\partial u}{\partial x_l}\cos(\widehat{\bar{n}, x_k})$; $\bar{n}$ — вектор внешней нормали (по отношению к D) к границе ∂D; $\sigma \in C[\partial D]$;

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\varphi_k\varphi_l \geqslant \gamma(t)\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2 \qquad (4)$$

для любых $\varphi^* = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, $\|\varphi\| \neq 0$, $\gamma(t) > 0$ $\forall t \geqslant 0$.

Интегрируя очевидное равенство по области D, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 2\iint_D u\frac{\partial u}{\partial t} = -2\iint_D\left[\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_k}{\partial x_k}u^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(B_k u^2) - cu^2\right]dD + 2\int_{\partial D}\left[u\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\frac{\partial u}{\partial x_l}\cos(\widehat{\bar{n}, x_k}) + \right.$$

$$\left. + u^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}b_k + B_k\right)\cos(\widehat{\bar{n}, x_k})\right]ds,$$

где функции B_k $(k = \overline{1, n})$ непрерывны вместе со своими производными $\frac{\partial B_k}{\partial x_k}$ [2].

Пусть в области $D \times [t \geqslant 0)$ существуют такие функции B_k, что по аргументу $x = (x_1, \ldots, x_n)$ выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial x_k} - B_k^2\right) > c^*(t, x), \qquad (5)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(B_k + \frac{1}{2}b_k\right)\cos(\widehat{\bar{n}, x_k}) - \sigma|_{\partial D} \leqslant 0. \qquad (6)$$

Здесь

$$c^* = \max_{D\times[t\geqslant 0)}\{\max_{\|\varphi\|=1}\varphi^* A^{-1}\varphi\}\left[c(t, x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_k}{\partial x_k}\right], \quad A = \|a_{kl}\|_{k,l=1}^{n}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \leqslant -2\beta(t) \iint\limits_D ((\nabla u)^2 + u^2)\, dD \quad (\beta(t) > 0).$$

Используя неравенства Пуанкаре и Коши — Буняковского

$$\iint\limits_D u^2 dD \leqslant M \left[\left(\iint\limits_D u dD\right)^2 + \iint\limits_D (\nabla u)^2 dD\right] \tag{7}$$

$$\left(\iint\limits_D u dD\right)^2 \leqslant \operatorname{mes} D \iint\limits_D u^2 dD, \tag{8}$$

записываем

$$\iint\limits_D ((\nabla u)^2 + u^2)\, dD \geqslant \frac{1}{c_0} \iint\limits_D u^2 dD,$$

где $c_0 = M \max\{1, \operatorname{mes} D\}$, $M > 0$ — const.

Поэтому

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \leqslant -\frac{2\beta(t)}{c_0} \iint\limits_D u^2 dD = -\frac{2\beta(t)}{c_0} \Phi(t).$$

Отсюда следует неравенство

$$\Phi(t) \leqslant \Phi(0) \exp\left\{-\frac{2}{c_0} \int\limits_0^t \beta(t)\, dt\right\}. \tag{9}$$

Если $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t \beta(t)\, dt = \infty$, то $\Phi(t) \to 0$; если $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_0^t \beta(t)\, dt < \infty$, то $\Phi(t) < b_0 < < \infty$, т. е. при выполнении условий (5), (6) решения уравнения (1) либо ограничены в среднем квадратичном, либо стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Используя геометрические признаки разрешимости краевых задач [1], можно сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^n b_k \cos(\widehat{n, x_k}) - \sigma \leqslant 0$, $\sigma^* = \left|\max\limits_{(x,t)} \left\{\frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^n b_k \times \times \cos(\widehat{n, x_k}) - \sigma\right\}\right|$, $p = \max\limits_{D\times[t\geqslant 0)} c^*(t, x)$. Если область D выпукла и

$$\left(\frac{F}{nV}\right)^2 \geqslant p \left(\operatorname{arctg} \frac{\sigma^*}{\sqrt{p}}\right)^{-2},$$

где V — объем, а F — площадь поверхности области D, то для решения задачи (1) — (3) выполняется неравенство (9).

Теорема 2. Пусть $R_j > 0$ $(j = \overline{1, n-1})$ — главные радиусы кривизны нормальных сечений невыпуклых частей поверхности ∂D, а $R_0 = \min\limits_j R_j$.

Если область D такова, что

$$\left[\frac{R_0}{R_0 + d_D}\right]^{n-1} \frac{1}{d_D} \geqslant \frac{\sqrt{p}}{2 \operatorname{arctg} \frac{\sigma^*}{\sqrt{p}}},$$

где d_D — внутренний диаметр области [2], то для решения задачи (1) — (3) справедливо неравенство (9).

Указанный метод исследования переносится и на системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим в цилиндре $D \times [t \geqslant 0)$ задачу

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k}\left(A_{kl} \frac{\partial U}{\partial x_l}\right) + CU, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\sum_{k,l=1}^n A_{kl} \frac{\partial U}{\partial x_l} \cos(\widehat{n, x_k}) + QU|_{\partial D} = 0, \tag{11}$$

$$U(0, x) = F(x), \quad F^* = (f_1, \ldots, f_m). \tag{12}$$

Здесь матрицы A_{kl} непрерывно дифференцируемы порядка m; $A_{kl} = A_{lk}$; C — непрерывная симметричная матрица; Q — непрерывная положительно определенная матрица. Предполагаем, что форма

$$\sum_{k,l=1}^{n} \varphi_k^* A_{kl} \varphi_l > 0.$$

Пусть

$$q = \min_{\partial D} \{\min_{\|\eta\|=1} \eta^* Q^s \eta\}, \ N = \min_{D\times[t\geqslant 0)} \{\min_{\|\eta\|=1} \eta^* C \eta\} \max_{D\times[t\geqslant 0)} \{\max_{\|\psi\|=1} \psi^* A^{-1} \psi\},$$

где Q^s — симметричная часть матрицы Q, $A = \| A_{kl} \|_{k,l=1}^{n}$.

Теорема 3. Если область D выпукла и

$$\left(\frac{F}{nV}\right)^2 \geqslant N \left(\operatorname{arctg} \frac{q}{\sqrt{N}}\right)^{-2},$$

то для решения задачи (10) — (12) выполняется неравенство

$$\Phi(t) \leqslant \Phi(0) \exp\left\{-\frac{2}{c_0} \int_0^t \alpha(t)\, dt\right\}, \tag{13}$$

где

$$\Phi(t) = \iint_D \sum_{k=1}^{m} u_k^2 dD, \ \alpha(t) > 0, \ c_0 > 0 - \text{const}.$$

Теорема 4. Если область D невыпукла и

$$\left[\frac{R_0}{R_0 + d_D}\right]^{n-1} \frac{1}{d_D} \geqslant \frac{\sqrt{N}}{2 \operatorname{arctg} \frac{q}{\sqrt{N}}},$$

то для решения задачи (10) — (12) справедливо неравенство (13).

1. *Коробчук И. В.* Об одном геометрическом признаке разрешимости некоторых краевых задач для линейных уравнений эллиптического типа и сильно эллиптических систем второго порядка.— Мат. физика, 1972, вып. 12, с. 67—71.
2. *Скоробогатько В. Я.* Исследование по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными.— Львов : Изд-во Льв. ун-та, 1961.— 125 с.

Луцкий филиал Львовского политехнического института

Поступила в редколлегию 26.02.79

УДК 517.63

О. В. Побережный, Я. Д. Пяныло

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ И УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА С ПОМОЩЬЮ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Проблема численного обращения преобразования Лапласа широко освещена в советской и зарубежной литературе. Наиболее полный обзор работ в этом направлении приведен в работах [1, 2, 8] *. Среди методов, дающих принципиальную возможность численно решить задачу обращения преобразования Лапласа, заслуживает внимания ввиду своей простоты метод, основанный на разложении оригинала по ортогональным многочленам. Однако задачам оценки погрешности и выяснению условий сходимости этого метода посвящено незначительное количество работ [3, 4, 6].

* В работе [8] приведена библиография в основном зарубежных авторов по численному обращению преобразования Лапласа и его применениям, охватывающая период 1934—1975 гг.