УДК 513.88

В. Э. Лянце, Я. В. Микитюк

О ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Пусть H, H_1, G, G_1 — гильбертовы пространства. Если $A : H \to H_1$, $B : G \to G_1$ — линейные плотно заданные операторы, то их тензорное произведение $A \otimes B$ является плотно заданным оператором и, как нетрудно видеть, $(A \otimes B)^* \supset A^* \otimes B^*$. Следовательно, если операторы A^* и B^* также плотно заданы, то и оператор $(A \otimes B)^*$ плотно задан. Поэтому, если A и B допускают замыкание, то и $A \otimes B$ допускает замыкание. Докажем такое утверждение: если линейные операторы A и B плотно заданы и допускают замыкание, то $(A \otimes B)^* = A^* \overline{\otimes} B^*$ ($A \overline{\otimes} B$ обозначает замыкание оператора $A \otimes B$).

2. Рассмотрим частный случай. Пусть $H = H_1 = L_2(X, dx)$, $G = G_1 = L_2(Y, dy)$, где X — пространство с мерой dx, а Y — пространство с мерой dy. Пусть l (соответственно m) обозначает комплекснозначную функцию, заданную на X (на Y), измеримую относительно dx (относительно dy), а A (соответственно B) — оператор в $L_2(X, dx)$ (в $L_2(Y, dy)$) умножения l (на m). Обозначим через C оператор в $L_2(X \times Y, dxdy)$ умножения на функцию n, где $n(x, y) = l(x)m(y)$. Тогда, используя отмеченное выше включение $(A \otimes B)^* \supset A^* \otimes B^*$, нетрудно убедиться, что $A \overline{\otimes} B = C$.

Сначала проверим, что $(A \otimes B)^* \subset C^*$. Очевидно, что $A^* \overline{\otimes} B^*$ и $(A \otimes B)^*$ являются операторами в пространстве $L_2(X \times Y, dx\, dy)$ умножения на $\overline{n(x, y)}$. Поэтому в рассматриваемом случае $(A \oplus B)^* = A^* \overline{\otimes} B^*$.

Следствие 1. Замыкание тензорного произведения нормальных (соответственно самосопряженных или унитарных) операторов есть нормальный (соответственно самосопряженный или унитарный) оператор.

3. Заметим, что если H, H_1, H_2 — гильбертовы пространства, $Q : H \to H_1$ — линейный ограниченный оператор (заданный необязательно всюду), $P : H_1 \to H_2$ — линейный оператор, допускающий замыкание, то PQ допускает замыкание и $\overline{PQ} \subset \overline{P}\overline{Q}$.

Следствие 2. Пусть в дополнение к предыдущим предположениям существует ограниченный обратный оператор $(\overline{Q})^{-1}$. Тогда $\overline{PQ} = \overline{P}\overline{Q}$.

Действительно, полагая $P_1 \overset{\mathrm{df}}{=} PQ$, получаем $P_1 Q^{-1} = P$, и согласно предыдущему $\overline{P_1 Q^{-1}} \subset \overline{P}_1 \overline{Q^{-1}}$.

4. Нам понадобится еще такое замечание. Пусть H, H_1, H_2 — гильбертовы пространства, $P : H \to H_1$ — линейный плотно заданный оператор, $Q : H_1 \to H_2$ — линейный плотно заданный ограниченный оператор. Если $R(P) \subset D(Q)$, то $(QP)^* = P^* Q^*$. При этом $D(\cdot)$ — область определения, а $R(\cdot)$ — область значений оператора $\cdot$. Так как включение $R(P) \subset D(Q)$ влечет равенство $D(QP) = D(P)$, то наше утверждение вытекает непосредственно из определения сопряженного оператора.

5. Докажем утверждение п. 1 в предположении, что $Z(A) = (0)$, $\overline{R(A)} = H_1$, $Z(B) = 0$, $\overline{R(B)} = G_1$, где $Z(\cdot)$ — многообразие нулей оператора $\cdot$. Для этого рассмотрим полярное разложение $A = US$, $B = VT$, где $S = (A^*A)^{1/2}$, $T = (B^*B)^{1/2}$, $U : H \to H_1$, $V : G \to G_1$ — унитарные операторы.

Имеем $A \otimes B = (U \otimes V)(S \otimes T)$ и в силу замечания п. 4 $(A \otimes B)^* = (S \otimes T)^* (U \otimes V)^*$. Отсюда, применяя результаты п. 2, получаем $(A \otimes B)^* = (S \overline{\otimes} T)(U^* \overline{\otimes} V^*)$. С другой стороны, $A^* \otimes B^* = SU^* \otimes TV^* = (S \otimes T)(U^* \otimes V^*)$. Поэтому в силу замечания п. 3 $A^* \overline{\otimes} B^* = (S \overline{\otimes} T)(U^* \overline{\otimes} V^*) = (A \otimes B)^*$.

6. Общий случай сводим к случаю, рассмотренному в п. 5, представляя оператор A в виде прямой суммы оператора $Z(A) \to R(A)^\perp$ равного нулю и оператора $Z(A)^\perp \to \overline{R(A)}$ равного сужению на $Z(A)^\perp \cap D(A)$ оператора A. Аналогично поступаем с оператором B.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 18.01.79

УДК 517.956.4

И. В. Коробчук, П. И. Миронюк

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $D \subset E^n$ — конечная область, ограниченная гладкой поверхностью ∂D. В цилиндре $D \times [t \geqslant 0)$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kl}(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) - \sum_{k=1}^{n} b_k(t, x)\frac{\partial u}{\partial x_k} - c(t, x)u = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u|_{\partial D} = 0, \tag{2}$$

$$u(0, x) = f(x), \tag{3}$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\frac{\partial u}{\partial x_l}\cos(\widehat{\bar{n}, x_k})$; $\bar{n}$ — вектор внешней нормали (по отношению к D) к границе ∂D; $\sigma \in C[\partial D]$;

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\varphi_k\varphi_l \geqslant \gamma(t)\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^2 \tag{4}$$

для любых $\varphi^* = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$, $\|\varphi\| \neq 0$, $\gamma(t) > 0$ $\forall t \geqslant 0$.

Интегрируя очевидное равенство по области D, получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 2\int\limits_D\int u\frac{\partial u}{\partial t} = -2\int\limits_D\int\left[\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_l} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_k}{\partial x_k}u^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(B_k u^2) - cu^2\right]dD + 2\int\limits_{\partial D}\left[u\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl}\frac{\partial u}{\partial x_l}\cos(\widehat{\bar{n}, x_k}) + \right.$$

$$\left. + u^2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}b_k + B_k\right)\cos(\widehat{\bar{n}, x_k})\right]ds,$$

где функции B_k $(k = \overline{1, n})$ непрерывны вместе со своими производными $\frac{\partial B_k}{\partial x_k}$ [2].

Пусть в области $D \times [t \geqslant 0)$ существуют такие функции B_k, что по аргументу $x = (x_1, \ldots, x_n)$ выполняются условия

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial B_k}{\partial x_k} - B_k^2\right) > c^*(t, x), \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(B_k + \frac{1}{2}b_k\right)\cos(\widehat{\bar{n}, x_k}) - \sigma|_{\partial D} \leqslant 0. \tag{6}$$

Здесь

$$c^* = \max_{D\times[t\geqslant 0)}\left\{\max_{\|\varphi\|=1}\varphi^* A^{-1}\varphi\right\}\left[c(t, x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial b_k}{\partial x_k}\right], \quad A = \|a_{kl}\|_{k,l=1}^{n}.$$