2. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки.— М. : Гостехтеориздат, 1957.— 463 с.
3. *Мартынович Т. Л.* Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 2, с. 64—69.
4. *Мартынович Т. Л., Кибальникова С. И.* Решение плоской задачи статической термоупругости для анизотропного тела с полостью при заданной температуре на ее поверхности.— В кн.: Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. Киев : Наук. думка, 1978, с. 70—79.
5. *Уздалев А. И.* Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела.— Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1967.— 164 с.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 07.02.79

УДК 517.94

А. А. Веселовская

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ АНИЗОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ

Задача о кручении неоднородного ортотропного стержня с сечением в виде кольцевого сектора, когда модули сдвига $G_1(r)$ и $G_2(r)$ пропорциональны некоторой степени r, решена С. Г. Лехницким [3]. В настоящей работе с использованием групповых свойств дифференциальных уравнений найдены новые зависимости между модулями сдвига $G_1(r)$ и $G_2(r)$, при которых эта задача также решается в явном виде.

Если в рассмотренном классе линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, инвариантных относительно группы преобразований с эллиптической траекторией [1]

$$\left(\frac{m^2\varphi_3}{2}+m\varphi_1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{2m}{r}\varphi_2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}+\left(\frac{m^2\varphi_3}{2r^2}-\frac{m\varphi_1}{r^2}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+$$
$$+\left(\frac{m^2\varphi_3}{2r}-\frac{m\varphi_1}{r}+\varphi_5\right)\frac{\partial u}{\partial r}+\left(\frac{2m\varphi_2}{r^2}-\frac{\varphi_4}{r^2}\right)\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\varphi_6 u=\varphi_7, \tag{1}$$

выбрать

$$\varphi_1(r)=\frac{1}{2}\left(\frac{r}{G_1}-\frac{r}{G_2}\right),\quad \varphi_2(r)=\varphi_4(r)=\varphi_6(r)=0,\quad \varphi_7(r)=-2r,$$
$$\varphi_3(r)=\frac{r}{G_1}+\frac{r}{G_2},\quad \varphi_5(r)=\frac{1}{G_1}-\frac{rG_1'}{G_1^2}-\frac{1}{G_2},\quad m=\frac{a}{b}=1, \tag{2}$$

то получим уравнение для определения функции напряжений неоднородного ортотропного стержня [3]:

$$\frac{r}{G_1}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{G_1}-\frac{rG_1'}{G_1^2}\right)\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{rG_2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=-2r, \tag{3}$$

где $G_1=G_{\theta z}$, $G_2=G_{rz}$ — непрерывные функции переменной r.

Задача о кручении ортотропного неоднородного стержня с сечением в виде кольцевого сектора K заключается в определении функции $u(r,\theta)$, удовлетворяющей уравнению (3) в K и следующим граничным условиям:

$$u\big|_{\substack{r=r_0\\0\leqslant\theta\leqslant\alpha}}=f_1(\theta),\quad u\big|_{\substack{r_0\leqslant r\leqslant r_1\\\theta=0}}=\psi_1(r),$$
$$u\big|_{\substack{r=r_1\\0\leqslant\theta\leqslant\alpha}}=f_2(\theta),\quad u\big|_{\substack{r_0\leqslant r\leqslant r_1\\\theta=\alpha}}=\psi_2(r). \tag{4}$$

Если в уравнении (3) ввести замену

$$u(r,\theta)=v(r,\theta)+u_0(r),$$

где $u_0(r)=-\int\limits_{r_0}^{r}\rho G_1(\rho)d\rho$ — частное решение уравнения (3), то решение краевой задачи (3), (4) можно свести к решению аналогичной задачи для соответствующего однородного уравнения

$$\frac{r}{G_1}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\left(\frac{1}{G_1}-\frac{rG_1'}{G_1^2}\right)\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{rG_2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=0 \tag{5}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} v\Big|_{\substack{r=r_0\\ 0\leqslant\theta\leqslant\alpha}} &= f_1(\theta)-u_0, \quad v\Big|_{\substack{r_0\leqslant r\leqslant r_1\\ \theta=0}}=\psi_1(r)-u_0,\\ v\Big|_{\substack{r=r_1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\alpha}} &= f_2(\theta)-u_0, \quad v\Big|_{\substack{r_0\leqslant r\leqslant r_1\\ \theta=\alpha}}=\psi_2(r)-u_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение $v(r,\theta)$ краевой задачи (5), (6) находим в виде суммы двух функций

$$v(r,\ \theta)=v_1(r,\ \theta)+v_2(r,\ \theta),$$

причем

1) $v_1(r,\theta)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} &v_1\Big|_{\substack{r=r_0,r_1\\ 0\leqslant\theta\leqslant\alpha}}=0, \quad v_1\Big|_{\substack{r_0<r<r_1\\ \theta=0}}=\psi_1(r)-u_0(r)=\psi_1(r)+\int_{r_0}^{r}\rho G_1(\rho)\,d\rho,\\ &v_1\Big|_{\substack{r_0<r<r_1\\ \theta=\alpha}}=\psi_2(r)-u_0(r)=\psi_2(r)+\int_{r_0}^{r}\rho G_1(\rho)\,d\rho; \end{aligned} \tag{7}$$

2) $v_2(r,\theta)$ — решение уравнения (5), удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} &v_2\Big|_{\substack{r=r_0\\ 0<\theta<\alpha}}=f_1(\theta), \quad v_2\Big|_{\substack{\theta=0,\alpha\\ r_0\leqslant r\leqslant r_1}}=0,\\ &v_2\Big|_{\substack{r=r_1\\ 0<\theta<\alpha}}=f_2(\theta)-u_0(r)=f_2(\theta)+\int_{r_0}^{r_1}\rho G_1(\rho)\,d\rho. \end{aligned} \tag{8}$$

Если искать частные решения уравнения (5) в виде

$$v_{1,e}=R_e(r)\exp[e\theta], \tag{9}$$

получим для $R_e(r)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$R_e''+\left(\frac{1}{r}-\frac{G_1'}{G_1}\right)R_e'+\frac{e^2}{r^2}\frac{G_1}{G_2}R_e=0, \tag{10}$$

которое известной заменой приводим к такому:

$$R_e''+I(r)R_e=0, \tag{11}$$

где

$$I(r)=\frac{e^2}{r^2}\frac{G_1}{G_2}+\frac{1}{4r^2}+\frac{1}{2r}\frac{G_1'}{G_1}-\frac{3}{4}\frac{G_1'^2}{G_1^2}+\frac{1}{2}\frac{G_1''}{G_1}.$$

Пусть $\xi=\frac{r\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}}$ и между G_1 и G_2 существует зависимость

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}r^{-1}G_1^{-1}G_1'+\frac{1}{4}r^{-1}G_2^{-1}G_2'-\frac{7}{16}G_1^{-2}G_1'^2-\frac{3}{16}G_2^{-2}G_2'^2-\\ &-\frac{3}{16}G_1^{-1}G_2^{-1}G_1'G_2'-\frac{1}{4}G_1^{-1}G_1''+\frac{1}{4}G_2^{-1}G_2''=0. \end{aligned} \tag{12}$$

Тогда для уравнения (11) выполнены условия интегрируемости в замкнутой форме

$$I(r)=\xi^{-2}(r)\left(-\lambda-\frac{1}{2}\xi''(r)\xi(r)+\frac{1}{4}\xi'^2(r)\right), \tag{13}$$

где $\xi(r)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция и λ — произвольная постоянная [2]. Каждому из трех случаев ($\lambda > 0$, $\lambda < 0$ и $\lambda = 0$) соответствует своя фундаментальная система решений уравнения:

$$R = \xi^{\frac{1}{2}}(r)(C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\,\varphi(r, r_0)) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\,\varphi(r, r_0))) \text{ для } \lambda < 0,$$

$$R = \xi^{\frac{1}{2}}(r)(C_1 \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}\,\varphi(r, r_0)) + C_2 \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}\,\varphi(r, r_0))) \text{ для } \lambda > 0, \quad (14)$$

$$R = \xi^{\frac{1}{2}}(r)(C_1 \varphi(r, r_0) + C_2) \text{ для } \lambda = 0,$$

где

$$\varphi(r, r_0) = \int_{r_0}^{r} \xi^{-1}(\rho)\, d\rho.$$

Решения уравнения (11) при условии (12) и при $\xi(r) = \frac{r\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_1}}$ в случае задачи (5), (7) должны обращаться в нуль при $r = r_0$ и $r = r_1$.

Таким образом, получаем задачу Штурма — Лиувилля:

$$R_e'' - \left(\frac{3}{4}\frac{G_2''}{G_1^2} - \frac{1}{2}\frac{G_1''}{G_1} - \frac{1}{2r}\frac{G_1'}{G_1} - \frac{1}{4r^2}\right)R_e + \frac{e^2}{r^2}\frac{G_1}{G_2}R_e = 0, \quad (15)$$

$$R_e(r_0) = 0, \quad R_e(r_1) = 0. \quad (16)$$

Согласно общей теории задач на собственные значения, если

$$\frac{3}{4}\frac{G_1''}{G_1^2} - \frac{1}{2}\frac{G_1}{G_1} - \frac{1}{2r}\frac{G_1'}{G_1} - \frac{1}{4r^2} \geqslant 0, \qquad r_0 \leqslant r \leqslant r_1,$$

то собственные функции задачи (15), (16) ортогональны с весом $\frac{G_1}{r^2 G_2}$.

При условии $\int_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{G_1(\rho)}}{\rho\sqrt{G_2(\rho)}}\, d\rho = k\pi$ находим собственные функции задачи (15), (16):

$$R_e(r) = \sqrt{r}\,\frac{\sqrt[4]{G_2(r)}}{\sqrt[4]{G_1(r)}} \sin\left(e\int_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{G_1(\rho)}}{\rho\sqrt{G_2(\rho)}}\, d\rho\right). \quad (17)$$

Решение задачи (5), (7) ищем в виде

$$v_1(r, \theta) = \sum_{e=-\infty}^{+\infty} R_e(r)\exp[e\theta] = A_0 R_0(r) + \sum_{e=1}^{\infty} R_e(r)(A_e \operatorname{ch} e\theta + B_e \operatorname{sh} e\theta) =$$

$$= \sum_{e=1}^{\infty} R_e(r)(A_e \operatorname{ch} e\theta + B_e \operatorname{sh} e\theta). \quad (18)$$

Определим коэффициенты A_e и B_e из второго граничного условия (7):

$$v_1(r, 0) = \sum_{e=1}^{\infty} R_e(r) A_e = \psi_1(r) + \int_{r_0}^{r} \rho G_1(\rho)\, d\rho,$$

$$v_1(r, \alpha) = \sum_{e=1}^{\infty} R_e(r)(A_e \operatorname{ch} e\alpha + B_e \operatorname{sh} e\alpha) = \psi_2(r) + \int_{r_0}^{r} \rho G_1(\rho)\, d\rho.$$

Учитывая ортогональность собственных функций $R_e(r)$ и $R_m(r)$ с весом $\frac{G_1(r)}{r^2 G_2(r)}$, получаем

$$A_e = \frac{\int\limits_{r_0}^{r_1} R_e(r) \frac{G_1(r)}{r^2 G_2(r)} \left(\psi_1(r) + \int\limits_{r_0}^{r} \rho G_1(\rho)\, d\rho \right) dr}{\int\limits_{r_0}^{r_1} R_e^2(r) \frac{G_1(r)}{r^2 G_2(r)}\, dr}, \tag{19}$$

$$B_e = \frac{1}{\operatorname{sh} e\alpha \int\limits_{r_0}^{r} R_e^2(r) \frac{G_1(r)}{r^2 G_2(r)}\, dr} \left(\int\limits_{r_0}^{r} \frac{G_1(r)}{r^2 G_2(r)} R_e(r) \left(\psi_2(r) + \int\limits_{r_0}^{r} \rho G_1(\rho)\, d\rho \right) dr - \right.$$

$$\left. - \operatorname{ch} e\alpha \int\limits_{r_0}^{r} R_e \frac{G_1(r)}{r^2 G_2(r)} \left(\psi_1(r) + \int\limits_{r_0}^{r} \rho G_1(\rho)\, d\rho \right) dr \right). \tag{20}$$

Рассмотрим задачу (5), (8). Ищем частные решения уравнения (5) в виде

$$v_{2e} = R_e(r) \exp\left[i \frac{e\pi\theta}{\alpha} \right]. \tag{21}$$

Для определения R_e получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$R_e'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{G_1'}{G_1} \right) R_e' - \frac{e^2\pi^2}{\alpha^2} \frac{G_1}{G_2} R_e = 0, \tag{22}$$

которое известной заменой приводится к такому:

$$R_e'' + \left(-\frac{e^2\pi^2}{\alpha^2} \frac{G_1}{G_2} + \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{2r} \frac{G_1'}{G_1} - \frac{3G_1'^2}{4G_1^2} + \frac{1}{2} \frac{G_1''}{G_1} \right) R_e = 0. \tag{23}$$

Если между $G_1(r)$ и $G_2(r)$ существует зависимость (12) и $\xi(r) = \frac{r\sqrt{G_2(r)}}{\sqrt{G_1(r)}}$, то условие интегрируемости (13) для уравнения (23) выполнено при $\lambda = \lambda_e = \frac{e^2\pi^2}{\alpha^2}$. Из (14) находим

$$R_e = \frac{\sqrt{r}\sqrt[4]{G_2(r)}}{\sqrt[4]{G_1(r)}} \left(C_{1e} \operatorname{ch}\left(\frac{e\pi}{\alpha} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{G_1(\rho)}}{\rho\sqrt{G_2(\rho)}}\, d\rho \right) + C_{2e} \operatorname{sh}\left(\frac{e\pi}{\alpha} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{G_1(\rho)}}{\rho\sqrt{G_2(\rho)}}\, d\rho \right) \right). \tag{24}$$

Решение задачи (5), (8) представляется рядом

$$v_2(r, \theta) = \sum_{e=-\infty}^{+\infty} R_e(r) \exp\left[\frac{ie\pi\theta}{\alpha} \right] = A_0 B_0 +$$

$$+ \frac{\sqrt{r}\sqrt[4]{G_2(r)}}{\sqrt[4]{G_1(r)}} \sum_{e=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{e\pi}{\alpha} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{G_1(\rho)}{\rho G_2(\rho)}\, d\rho \right) \left(A_e \cos\frac{e\pi\theta}{\alpha} + B_e \sin\frac{e\pi\theta}{\alpha} \right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sh}\left(\frac{e\pi}{\alpha} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{G_1(\rho)}}{\rho G_2(\rho)}\, d\rho \right) \left(C_e \cos\frac{e\pi\theta}{\alpha} + D_e \sin\frac{e\pi\theta}{\alpha} \right) \right). \tag{25}$$

Если положить $A_0 = A_e = C_e = 0$ $(e = 1, 2, \ldots)$, то $v_2(r, 0) = v_2(r, \alpha) = 0$. Затем при $r = r_0$

$$v_2(r_0, \theta) = \frac{\sqrt{r_0}\sqrt[4]{G_2(r_0)}}{\sqrt[4]{G_1(r_0)}} \sum_{e=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{e\pi}{\alpha} \int\limits_{r_0}^{r_0} \frac{\sqrt{G_1(\rho)}}{\rho\sqrt{G_2(\rho)}}\, d\rho \right) B_e + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sh}\left(\frac{e\pi}{\alpha} \int\limits_{r_0}^{r_0} \frac{G_1(\rho)}{\rho G_2(\rho)}\, d\rho \right) D_e \right) \sin\frac{e\pi\theta}{\alpha} = f_1(\theta)$$

и при $r = r_1$

$$v_2(r_1, \theta) = \frac{\sqrt{r_1}\sqrt[4]{G_2(r_1)}}{\sqrt[4]{G_1(r_1)}} \sum_{e=1}^{\infty}\left(\operatorname{ch}\frac{ke\pi^2}{\alpha}B_e + \operatorname{sh}\frac{ke\pi^2}{\alpha}D_e\right)\sin\frac{e\pi\theta}{\alpha} =$$

$$= f_2(\theta) + \int_{r_0}^{r_1}\rho G_1(\rho)\,d\rho.$$

Отсюда

$$B_e = \frac{\sqrt[4]{G_1(r_0)}}{\sqrt{r_0}\sqrt[4]{G_2(r_0)}}\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f_1(\theta)\sin\frac{e\pi\theta}{\alpha}\,d\theta, \qquad (26)$$

$$D_e = \frac{\sqrt[4]{G_1(r_1)}}{\sqrt{r_1}\sqrt[4]{G_2(r_1)}\operatorname{sh}\frac{e\pi^2 k}{\alpha}}\left(\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}\left(f_2(\theta) + \int_{r_0}^{r_1}\rho G_1(\rho)\,d\rho\right)\sin\frac{e\pi\theta}{\alpha}\,d\theta -\right.$$

$$\left. - \frac{2}{\alpha}\frac{\sqrt[4]{G_2(r_1)}}{\sqrt[4]{G_1(r_1)}}\frac{\sqrt{r_1}\sqrt[4]{G_1(r_0)}}{\sqrt{r_0}\sqrt[4]{G_2(r_0)}}\operatorname{ch}\frac{ek\pi^2}{\alpha}\int_0^{\alpha} f_1(\theta)\sin\frac{e\pi\theta}{\alpha}\,d\theta\right). \qquad (27)$$

В итоге решение задачи (3), (4) о кручении ортотропного неоднородного стержня с сечением в виде части кругового кольца представляется так:

$$u(r, \theta) = -\int_{r_0}^{r}\rho G_1(\rho)\,d\rho + v_1(r, \theta) + v_2(r, \theta),$$

где $v_1(r, \theta)$ и $v_2(r, \theta)$ — ряды (18) и (25) с соответствующими коэффициентами (19), (20) и (26), (27).

Если функции $\psi_1(r)$, $\psi_2(r)$ и $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$ непрерывно дифференцируемые четыре раза соответственно на отрезках $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ и $0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$, а на их концах удовлетворяют условиям

$$\psi_1(r_0) = \psi_2(r_0) = 0,\ \psi_1'(r_0) = \psi_2'(r_0) = u_0'(r_0),$$

$$\psi_1''(r_0) = \psi_2''(r_0) = u_0''(r_0),\ \psi_1(r_1) = \psi_2(r_1) = u_0(r_1),$$

$$\psi_1'(r_1) = \psi_2'(r_1) = u_0'(r_1),\ \psi_1''(r_1) = \psi_2''(r_1) = u_0''(r_1);$$

$$f_1(0) = f_1(\alpha) = f_1''(0) = f_1''(\alpha),\ f_2(0) = f_2(\alpha) = u_0(r_1),$$

$$f_2''(0) = f_2''(\alpha) = 0,$$

то полученное решение будет классическим.

1. *Костенко В. Г., Веселовська О. О.* Загальне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку на площині, інваріантне відносно однієї заданої групи перетворень.— Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1972, вип. 7, с. 86—90.
2. *Костенко К. С.* Умови інтегрування у квадратурах деяких звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.— Вісн. Льв. ун-ту. Сер. мех.-мат., 1972, вип. 7, с. 61—69.
3. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней.— М.: Наука, 1971.— 240 с.

Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию 02.06.78

УДК 513.88

О. Г. Сторож

К ВОПРОСУ ОБ ОБРАТИМОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_n$ — комплексные гильбертовы пространства, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_n$ — их ортогональная сумма, P_i — ортопроектор из $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_i$, $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$; $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_i, \mathfrak{H}_j)$ (где $\mathfrak{H}_i$ и $\mathfrak{H}_j$ — гильбертовы пространства) — прост-