

Для различных значений параметра $\frac{E}{G}$ вычислены прогибы оболочки w . На рисунке сплошными линиями изображены безразмерные прогибы $w^* = w \frac{R^2}{M_0 D}$, вычисленные на основании решения уравнения (10), штриховыми — соответствующие прогибы в случае, когда в уравнении (10) опущено выражение $2g^2 \frac{d^2 w}{d\alpha^2}$ или в системе (8) выражение $2ib^2 \varepsilon R^{-2} \nabla^2 \operatorname{Re} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \alpha^2}$. Как видно из графиков, при определенных значениях параметра $\frac{E}{G}$ пренебрежение указанными величинами приводит к существенным погрешностям и поэтому недопустимо.

1. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. — Л.: Судпромгиз, 1962. — 430 с.
2. Осадчук В. А., Ярмошук И. С. Упругое равновесие замкнутой цилиндрической оболочки с системой периодически расположенных параллельных трещин. — В кн.: Физико-механические поля в деформируемых средах. Киев: Наук. думка, 1978, с. 51—58.
3. Осадчук В. А., Костенко И. С. Напряженное состояние пологой цилиндрической оболочки с бесконечным рядом параллельных трещин при симметричной нагрузке. — ФХММ, 1979, № 1, с. 33—38.
4. Осадчук В. А. Термоупругое равновесие замкнутой цилиндрической оболочки с поперечной трещиной, на берегах которой задана температура. — В кн.: Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1978, с. 132—140.
5. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. — Киев: Наук. думка, 1973. — 248 с.
6. Пелех Б. Л., Лунь Е. М. Статико-геометрическая аналогия и метод комплексного преобразования в теории упругих оболочек типа Тимошенко. — Докл. АН СССР, 1970, 192, № 6, с. 1239—1240.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.02.79

УДК 539.377

Г. Л. Мартынович, С. И. Кибальникова

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРЯМОЛИНЕЙНО-АНИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрим плоскую задачу стационарной термоупругости для однородного прямолинейно-анизотропного (относительно упругих и тепловых свойств) тела с некруговой цилиндрической полостью, подверженного тепловому воздействию. Тело отнесено к прямоугольной системе координат $Oxyz$. Координатная плоскость xOy совмещена с поперечным сечением длинного призматического тела или со срединной плоскостью тонкой пластинки с теплоизолированными торцевыми поверхностями. Внешняя граница призматического тела может быть свободной или неподвижно закрепленной.

Пусть нормальное сечение призматического тела (или срединная плоскость пластинки) занимает область S с отверстием, ограниченным простым замкнутым контуром L , который описывается уравнением

$$x + iy = R \left(e^{i\theta} + \sum_{k=1}^N C_k e^{-ik\theta} \right) \left(\sum_{k=1}^N k |C_k| < 1 \right). \quad (1)$$

Предполагается, что размеры отверстия L малы по сравнению с размерами тела и отверстие достаточно удалено от края. Поэтому при аналитическом решении задачи область S рассматривается бесконечной.

Определение стационарного температурного поля сводится к интегрированию уравнения [5]

$$K_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2K_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + K_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

при соответствующих граничных условиях. Здесь K_{ij} — коэффициенты теплопроводности; T — температура среды.

Общее решение уравнения (2) выражается через аналитическую функцию $\Phi_3(z_3)$ переменного $z_3 = x + \mu_3 y$ по формуле [5]

$$T = 2 \operatorname{Re} \Phi_3(z_3), \quad (3)$$

причем

$$\mu_3 = \frac{-K_{12} + iK}{K_{22}}, \quad K = \sqrt{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} \quad (K_{11}K_{22} - K_{12}^2 > 0).$$

Если температура тела (3) известна, комплексные потенциалы $\Phi_j(z_j) = \Phi_j^*(z_j)$ ($j = 1, 2$), описывающие термоупругое состояние анизотропного тела, определяются из граничных условий [4]

$$\int_L F(t) dU = -r(1 + i\mu_3) \int_L F(t) \Phi_3(t_3) dt_3 - \bar{r}(1 + i\bar{\mu}_3) \int_L F(t) \overline{\Phi_3(t_3)} d\bar{t}_3, \\ \int_L \overline{F(t)} dU = -r(1 + i\mu_3) \int_L \overline{F(t)} \Phi_3(t_3) dt_3 - \bar{r}(1 + i\bar{\mu}_3) \int_L \overline{F(t)} \overline{\Phi_3(t_3)} d\bar{t}_3. \quad (4)$$

Здесь [2, 5]

$$dU = \sum_{j=1}^2 [(1 + i\mu_j) \Phi_j^*(z_j) dz_j + (1 + i\bar{\mu}_j) \overline{\Phi_j^*(z_j)} d\bar{z}_j];$$

$$r = \frac{\alpha_3 \mu_3 - \alpha_1 \mu_3^2 - \alpha_2}{\alpha_{11} (\mu_3 - \mu_1) (\mu_3 - \mu_2) (\mu_3 - \bar{\mu}_1) (\mu_3 - \bar{\mu}_2)}; \quad (5)$$

α_j — температурные коэффициенты линейной и угловой деформации; t — аффикс точки контура L ; $z_j = x + \mu_j y$ ($j = 1, 2, 3$) — обобщенные комплексные переменные, изменяющиеся в областях S_j , полученных из области S соответствующими аффинными преобразованиями; $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ ($j = 1, 2$) — корни соответствующих характеристических уравнений [2]; $F(t)$ — граничное значение произвольной функции $F(z)$ переменной $z = x + iy$, голоморфной в области S .

Контур отверстия областей S_j переменных $z_j = x + \mu_j y$ обозначим через L_j , а аффиксы их точек — через t_j ($j = 1, 2, 3$). Аффиксы точек контуров L_j и L находятся между собой в аффинном соответствии:

$$t_j = \frac{1}{2} (1 - i\mu_j) t + \frac{1}{2} (1 + i\mu_j) \bar{t} \quad (j = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Аналитические функции $\Phi_j(z_j)$ ($j = 1, 2$) должны удовлетворять условию однозначности смещений [4]

$$\int_{L_j} \Phi_j(t_j) dt_j = D_j^{(1)} \int_{L_3} \Phi_3(t_3) dt_3 + D_j^{(2)} \int_{L_3} \overline{\Phi_3(t_3)} d\bar{t}_3 \quad (j = 1, 2). \quad (7)$$

Величины $D_j^{(k)}$ для ортотропного материала вычисляются по формулам

$$D_j^{(1)} = (-1)^j \frac{E_1 (\alpha_1 \beta_j^2 - \alpha_2)}{2\beta_j (\beta_3 - \beta_j) (\beta_1^2 - \beta_2^2)}, \quad D_j^{(2)} = (-1)^{j+1} \frac{E_1 (\alpha_1 \beta_j^2 - \alpha_2)}{2\beta_j (\beta_3 + \beta_j) (\beta_1^2 - \beta_2^2)}. \quad (8)$$

При больших $|z_j|$ и при отсутствии сосредоточенных источников тепла в области S функции $\Phi_j(z_j)$ ($j = 1, 2, 3$) имеют вид

$$\Phi_j(z_j) = B_j^\infty z_j + A_0^{(j)} + D_j^{(j)} z_j^{-1} + O\left(\frac{1}{z_j^2}\right) \quad (j = 1, 2, 3), \quad (9)$$

причем для ортотропного материала при незакрепленной внешней границе тела

$$B_j^\infty = (-1)^j \frac{E_1 (\alpha_1 \beta_3^2 - \alpha_2) q_\infty}{2 (\beta_3^2 - \beta_j^2) (\beta_2^2 - \beta_1^2)} \left(\frac{\cos \beta}{K_{11}} - i \frac{\sin \beta}{\beta_j K_{22}} \right) \quad (j = 1, 2),$$

$$A_0^{(j)} = \bar{A}_0^{(j)} = (-1)^j \frac{E_1 (\alpha_1 \beta_3^2 - \alpha_2) T_\infty}{2 (\beta_3^2 - \beta_j^2) (\beta_1^2 - \beta_2^2)} \quad (j = 1, 2), \quad (10)$$

$$B_3^\infty = -\frac{q_\infty}{2} \left(\frac{\cos \beta}{K_{11}} - i \frac{\sin \beta}{K} \right), \quad A_0^{(3)} = \frac{1}{2} T_\infty.$$

Здесь g_∞ — интенсивность теплового потока на бесконечности, направленного под углом β к оси x ; T_∞ — температура тела на бесконечности. Постоянные $D^{(j)}$ ($j = 1, 2$) определяются из условий (7).

Если внешняя граница ортотропного тела жестко закреплена и теплоизолирована ($q_\infty = 0$), то

$$A_0^{(j)} = \bar{A}_0^{(j)} = (-1)^j \frac{T_\infty E_1 \alpha_1}{2 (\beta_1^2 - \beta_2^2)} \left[\frac{\beta_j^2 - \eta}{\beta_3^2 - \beta_j^2} - \frac{\nu_1 + \eta + \beta_j^2 (1 + \nu_2 \eta)}{\beta_j^2 (1 - \nu_1 \nu_2)} \right], \quad (11)$$

$$B_j^\infty = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad A_0^{(3)} = \frac{1}{2} T_\infty, \quad \eta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Регулярная функция, конформно отображающая внешность единичной окружности γ ($|\varepsilon| > 1$) на внешность контура L области S , имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \sum_{k=1}^N C_k \zeta^{-k} \right) \left(\omega'(\zeta) \neq 0, |\zeta| > 1, \sum_{k=1}^N k |C_k| < 1 \right). \quad (12)$$

Изменяя в соотношении (12) постоянные R , C_k и N , можно получить отверстия в форме круга, эллипса, овала, криволинейного треугольника, четырехугольника и т. д.

Уравнения контуров L_j областей S_j (6) с учетом (12) принимают вид ($\sigma = e^{i\theta}$)

$$t_j = R_j \left[\sigma + m_j \sigma^{-1} + \sum_{k=1}^N C_k (m_j \sigma^k + \sigma^{-k}) \right], \quad (13)$$

$$R_j = \frac{1}{2} R (1 - i\mu_j), \quad m_j = \frac{1 + i\mu_j}{1 - i\mu_j} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Из формулы (6) находим

$$dt_j = R_j \left[1 - m_j \sigma^{-2} + \sum_{k=1}^N C_k k (m_j \sigma^{k-1} - \sigma^{-k-1}) \right] d\sigma. \quad (14)$$

Произвольную голоморфную функцию $F(z)$ в преобразованной области представим в виде ряда

$$F(z) = F_*(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}. \quad (15)$$

Функции $\Phi_j(z_j) = \Phi_j'(z_j)$ ($j = 1, 2$) в преобразованных областях ищем в виде степенных рядов

$$\Phi_j(z_j) = \Phi_{*j}(\zeta_j) = B_j^\infty \omega_j(\zeta_j) + \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(j)} \zeta_j^{-k},$$

$$\lim_{|\zeta_j| \rightarrow \infty} [\Phi_{*j}(\zeta_j) - B_j^\infty \omega_j(\zeta_j)] = A_0^{(j)} \quad (j = 1, 2). \quad (16)$$

Внесем выражения (5), (14), (15) и (16) в граничное условие (4) и выполним интегрирование. Учитывая при этом произвольность функции (15),

получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $A_n^{(j)}$ ($j = 1, 2$):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 (1 + i\mu_j^2) \left[A_{1-n}^{(j)} + m_j \sum_{k=1}^N k C_k A_{k-n}^{(j)} \right] + \\ & + \sum_{j=1}^2 (1 - i\mu_j)^2 \left[m_j \bar{A}_{n-1}^{(j)} - \bar{A}_{n+1}^{(j)} + \sum_{k=1}^N k C_k (\bar{A}_{n-k}^{(j)} - m_j \bar{A}_{n+k}^{(j)}) \right] = q_n, \quad (17) \\ & \sum_{j=1}^2 (1 - i\mu_j)^2 \left[\bar{A}_{1-n}^{(j)} + m_j \sum_{k=1}^N k C_k \bar{A}_{k-n}^{(j)} \right] + \sum_{j=1}^2 (1 + i\mu_j^2) \left[m_j A_{n-1}^{(j)} - A_{n+1}^{(j)} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^N k C_k (A_{n-k}^{(j)} - m_j A_{n+k}^{(j)}) \right] = f_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots, \infty), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q_n &= - \int_{\gamma} \sigma^{-n} dU_1 - r (1 + i\mu_3) \int_{\gamma} \sigma^{-n} \Phi_{*3}(\sigma) \omega_3(\sigma) d\sigma - \\ & - \bar{r} (1 + i\bar{\mu}_3) \int_{\gamma} \sigma^{-n} \overline{\Phi_{*3}(\sigma)} \overline{\omega_3(\sigma)} d\bar{\sigma}, \\ f_n &= - \int_{\gamma} \sigma^n dU_1 - r (1 + i\mu_3) \int_{\gamma} \sigma^n \Phi_{*3}(\sigma) \omega_3(\sigma) d\sigma - \\ & - \bar{r} (1 + i\bar{\mu}_3) \int_{\gamma} \sigma^n \overline{\Phi_{*3}(\sigma)} \overline{\omega_3(\sigma)} d\bar{\sigma}. \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь

$$dU_1 = \sum_{j=1}^2 [(1 + i\mu_j) B_j^{\infty} \omega_j(\sigma) \omega_j'(\sigma) d\sigma + (1 + i\bar{\mu}_j) \bar{B}_j^{\infty} \overline{\omega_j(\sigma)} \overline{\omega_j'(\sigma)} d\bar{\sigma}].$$

Величины (18) в явном виде приведены в работе [4].

В случае равномерно нагретой до температуры $T = T_0 = \text{const}$ пластинки функция температуры (3)

$$\Phi_3(z_3) = \frac{1}{2} T_0. \quad (19)$$

С учетом этого и при отсутствии внешней нагрузки величины (18) определяются по формуле

$$\begin{aligned} q_n &= - \frac{T_0}{2} \left\{ r (1 + \mu_3^2) \left[\delta_{n1} + m_3 \sum_{k=1}^N k C_k \delta_{nk} \right] + \bar{r} (1 + i\mu_3)^2 \left[m_3 \delta_{n1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^N k C_k \delta_{nk} \right] \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

$$f_n = \frac{T_0}{2} \left\{ r (1 + \mu_3^2) \left[m_3 \delta_{n1} + \sum_{k=1}^N k C_k \delta_{nk} \right] + \bar{r} (1 - i\mu_3)^2 \left[m_3 \sum_{k=1}^N k C_k \delta_{nk} + \delta_{n1} \right] \right\},$$

где δ_{nk} — символ Кронекера.

К системе (17) необходимо присоединить условие однозначности смещений (7), которое для равномерно нагретой пластинки имеет вид

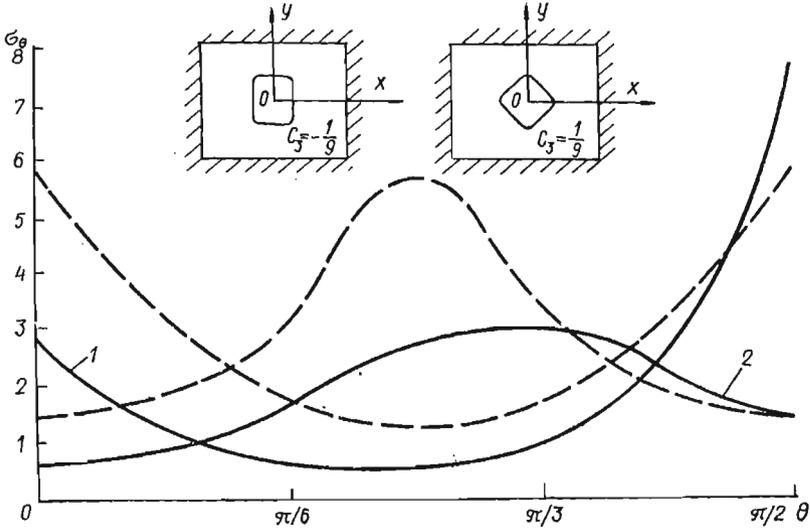
$$A_j^{(j)} + m_j \sum_{k=1}^N k C_k A_k^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (21)_s$$

Напряжения на площадках, нормальных к контуру отверстия L , вычисляются по формуле

$$\sigma_{\theta} = 2 \sum_{j=1}^2 (1 + \mu_j^2) \text{Re} [\varphi_j'(t_j)] + 2r (1 + \mu_3^2) \text{Re} \Phi_3(t_3). \quad (22)_s$$

В качестве числового примера рассмотрим равномерно нагретую ортотропную пластинку с квадратным отверстием, внешний контур которого жестко закреплен и теплоизолирован [2]. В этом случае $\mu_j = i\beta_j$ ($j = 1, 2, 3$), $N = 3$, $C_1 = C_2 = 0$, $C_3 = \bar{C}_3$, $R = \bar{R}$. При положительном C_3 вершины квадрата лежат на осях x и y , а при отрицательном C_3 стороны квадрата параллельны осям координат. Коэффициенты $A_n^{(j)}$ — величины действительные, причем с нечетными индексами n равны нулю. Формула для напряжений (22) в этом случае принимает вид

$$\sigma_\theta = 2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \beta_j^2) A_k^{(j)} \cos k\theta + r(1 - \beta_3^2) T_0. \quad (23)$$



Вычисления проводились для пластинки, изготовленной из стеклотекстолита КАСТ-В, с такими упругими и теплофизическими характеристиками:

$$\frac{E_1}{E_2} = 1,45, \quad \frac{E_1}{G} = 6, \quad \nu_1 = 0,17, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0,8, \quad \frac{K_{22}}{K_{11}} = 0,6. \quad (24)$$

Решалась укороченная система уравнений (17) порядка 50×50 (сходимость разложения (16) медленная, что следует из выражения (23), которое является параметрическим уравнением эпилоры σ_θ).

На рисунке приведены графики распределения напряжений σ_θ (в долях $E_1 \alpha_1 T_0$) вдоль контура квадратного отверстия с закругленными углами (кривая 1 — $C_3 = 1/9$, кривая 2 — $C_3 = -1/9$). Полученные результаты совпадают с результатами аналогичной задачи, решенной в работе [1] методом, изложенным в статье [3].

Для ортотропного материала, достаточно близкого к изотропному ($\beta_1 = 1,003363$, $\beta_2 = 0,996648$, $E_2/E_1 = 0,9998$), вычислялись напряжения σ_θ (в долях $E \alpha_T T_0$) по формулам (17), (23) и по формуле для изотропного материала

$$\sigma_\theta = \frac{2E\alpha_T T_0}{1 - \nu} \frac{1 - 9C_3^2}{1 + 9C_3^2 - 6C_3 \cos 4\theta}. \quad (25)$$

Штриховые кривые на рисунке соответствуют случаю изотропного материала.

Полученные численные значения напряжений σ_θ по формулам (23) и (25) практически полностью совпадают с точностью четырех значащих цифр.

1. Кибальникова С. И. Определение температурных напряжений в равномерно нагретой анизотропной пластинке с криволинейным отверстием. — Вестн. Льв. ордена Ленина политехн. ин-та. Математика и механика, 1977, № 119, с. 64—68 (укр. яз.).

2. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки.— М.: Гостехтеориздат, 1957.— 463 с.
3. Мартынович Т. Л. Точное решение плоской задачи теории упругости для анизотропной пластинки с криволинейным отверстием.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 2, с. 64—69.
4. Мартынович Т. Л., Кибальникова С. И. Решение плоской задачи статической термоупругости для анизотропного тела с полостью при заданной температуре на ее поверхности.— В кн.: Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. Киев: Наук. думка, 1978, с. 70—79.
5. Уздалев А. И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела.— Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1967.— 164 с.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редколлегию
07.02.79

УДК 517.94

А. А. Веселовская

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ АНИЗОТРОПНОГО СТЕРЖНЯ

Задача о кручении неоднородного ортотропного стержня с сечением в виде кольцевого сектора, когда модули сдвига $G_1(r)$ и $G_2(r)$ пропорциональны некоторой степени r , решена С. Г. Лехницким [3]. В настоящей работе с использованием групповых свойств дифференциальных уравнений найдены новые зависимости между модулями сдвига $G_1(r)$ и $G_2(r)$, при которых эта задача также решается в явном виде.

Если в рассмотренном классе линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, инвариантных относительно группы преобразований с эллиптической траекторией [1]

$$\left(\frac{m^2\varphi_3}{2} + m\varphi_1\right) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2m}{r} \varphi_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \left(\frac{m^2\varphi_3}{2r^2} - \frac{m\varphi_1}{r^2}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} +$$

$$+ \left(\frac{m^3\varphi_3}{2r} - \frac{m\varphi_1}{r} + \varphi_5\right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{2m\varphi_2}{r^2} - \frac{\varphi_4}{r^2}\right) \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \varphi_6 u = \varphi_7, \quad (1)$$

выбрать

$$\varphi_1(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{r}{G_1} - \frac{r}{G_2} \right), \quad \varphi_2(r) = \varphi_4(r) = \varphi_8(r) = 0, \quad \varphi_7(r) = -2r, \quad (2)$$

$$\varphi_3(r) = \frac{r}{G_1} + \frac{r}{G_2}, \quad \varphi_5(r) = \frac{1}{G_1} - \frac{rG_1'}{G_1^2} - \frac{1}{G_2}, \quad m = \frac{a}{b} = 1,$$

то получим уравнение для определения функции напряжений неоднородного ортотропного стержня [3]:

$$\frac{r}{G_1} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{G_1} - \frac{rG_1'}{G_1^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{rG_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -2r, \quad (3)$$

где $G_1 = G_{\theta z}$, $G_2 = G_{rz}$ — непрерывные функции переменной r .

Задача о кручении ортотропного неоднородного стержня с сечением в виде кольцевого сектора K заключается в определении функции $u(r, \theta)$, удовлетворяющей уравнению (3) в K и следующим граничным условиям:

$$u|_{\substack{r=r_0 \\ 0 \leq \theta \leq \alpha}} = f_1(\theta), \quad u|_{\substack{r_0 \leq r \leq r_1 \\ \theta=0}} = \psi_1(r),$$

$$u|_{\substack{r=r_1 \\ 0 \leq \theta \leq \alpha}} = f_2(\theta), \quad u|_{\substack{r_0 \leq r \leq r_1 \\ \theta=\alpha}} = \psi_2(r). \quad (4)$$

Если в уравнении (3) ввести замену

$$u(r, \theta) = v(r, \theta) + u_0(r),$$

где $u_0(r) = -\int_{r_0}^r \rho G_1(\rho) d\rho$ — частное решение уравнения (3), то решение краевой задачи (3), (4) можно свести к решению аналогичной задачи для