УДК 539.3

В. А. Осадчук, И. С. Костенко

О ПРИМЕНЕНИИ КОМПЛЕКСНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ТЕОРИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

В последнее время большую популярность в теории оболочек приобрел комплексный метод В. В. Новожилова [1]. Использование этого метода в теории оболочек, базирующейся на гипотезах Кирхгофа — Лява, позволяет вдвое понизить порядок разрешающих уравнений и при исследовании целого ряда задач значительно сократить объем вычислительных работ при проведении числовых расчетов. В частности, преимущество этого метода раскрывается при решении широкого класса задач об упругом равновесии оболочек с разрезами (трещинами) [2—4]. В связи с внедрением в практику новых композиционных материалов широко применяются уточненные классические теории оболочек, в частности теория оболочек типа Тимошенко, основанная на базе сдвиговой модели. Естественно возникает вопрос о применении комплексного преобразования в рамках этой теории. Ниже на примере цилиндрической оболочки показано изменение структуры разрешающих уравнений в комплексной форме в случае сдвиговой модели по сравнению с моделью, базирующейся на гипотезах Кирхгофа — Лява.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку толщиной $2h$, отнесенную к триортогональной системе координатных линий (α, β, γ), являющихся соответственно линиями главных кривизн срединной поверхности и внешней нормалью к ней. Пусть оболочка находится под воздействием нормальной нагрузки q. За исходные примем уравнения технической теории трансверсально-изотропных оболочек в комплексных усилиях [5, 6]

$$\frac{\partial \tilde{N}_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{N}_2}{\partial \beta} + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \alpha} = 0, \quad \tilde{N}_2 - \frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial \tilde{Q}_2}{\partial \beta} = Rq,$$
$$ic\,\frac{\partial \tilde{N}}{\partial \alpha} + \varepsilon\left[\frac{\partial \Pi_1}{\partial \alpha} + \frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial \Pi_{12}}{\partial \beta}\right] - R\tilde{Q}_1 = 0, \quad ic\,\frac{\partial \tilde{N}}{\partial \beta} + \varepsilon\left[\frac{\partial \Pi_2}{\partial \beta} + \frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial \Pi_{12}}{\partial \alpha}\right] - R\tilde{Q}_2 = 0, \tag{1}$$

где

$$\Pi_1 = \frac{1}{R}\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial \alpha} + \nu\,\frac{\partial \tilde{Q}_2}{\partial \beta}\right]; \quad \Pi_2 = \frac{1}{R}\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \tilde{Q}_2}{\partial \beta} + \nu\,\frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial \alpha}\right];$$
$$\Pi_{12} = \frac{1}{R}\operatorname{Re}\left[\frac{\partial \tilde{Q}_1}{\partial \beta} + \frac{\partial \tilde{Q}_2}{\partial \alpha}\right]; \quad c = \frac{h}{\sqrt{3(1-\nu^2)}}; \quad \varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)}\,\frac{E}{G'};$$

R — радиус срединной поверхности; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; G' — модуль сдвига в площадках, перпендикулярных срединной поверхности; k' — коэффициент сдвига; ε — параметр, характеризующий податливость трансверсально-изотропной оболочки на сдвиг.

Усилия и моменты выражаются следующим образом:

$$N_k = \operatorname{Re}\tilde{N}_k, \quad M_k = \operatorname{Re}\tilde{M}_k, \quad Q_k = \operatorname{Re}\tilde{Q}_k, \quad S = \operatorname{Re}\tilde{S}, \quad H = \operatorname{Re}\tilde{H},$$
$$\tilde{M}_k = ic\,(\tilde{N}_j - \nu\bar{\tilde{N}}_k) + \varepsilon\Pi_k\,(\tilde{Q}_j,\ \tilde{Q}_k), \tag{2}$$
$$\tilde{H} = -ic\,(\tilde{S} + \nu\bar{\tilde{S}}) + \frac{\varepsilon(1-\nu)}{2}\,\Pi_{12}\,(\tilde{Q}_1,\ \tilde{Q}_2) \qquad (k \neq j = 1,\ 2).$$

Первые два уравнения (1) будут удовлетворены, если ввести комплексную функцию $\tilde{\Phi}$ по формулам

$$\tilde{N}_1 = -\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\tilde{\Phi}, \quad \tilde{N}_2 = -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\tilde{\Phi}, \quad \tilde{S} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\tilde{\Phi}. \tag{3}$$

Продифференцировав четвертое уравнение системы (1) по α, а пятое по β и сложив их, получим

$$ic\nabla^2\tilde{N} - R\,(1 - \varepsilon R^{-2}\nabla^2\,\mathrm{Re})\left(\frac{\partial\tilde{Q}_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial\tilde{Q}_2}{\partial\beta}\right) = 0, \tag{4}$$

где $\tilde{N} = \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2$; $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial\beta^2}$.

Действуя теперь оператором $1 - \varepsilon R^{-2}\nabla^2\mathrm{Re}$ на третье уравнение системы (1) с учетом формул (3), (4), для определения функции $\tilde{\Phi}$ получаем разрешающее уравнение

$$\nabla^2\nabla^2\tilde{\Phi} + 2ib^2\,(1 - \varepsilon R^{-2}\nabla^2\,\mathrm{Re})\,\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\alpha^2} = -\,2ib^2\,(1 - \varepsilon R^{-2}\nabla^2\,\mathrm{Re})\,Rq. \tag{5}$$

Для дальнейшего упрощения системы (1) введем комплексную функцию $\tilde{\Omega}$, связанную с комплексными перерезывающими усилиями следующим образом:

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_1 &= \frac{ic}{R}\frac{\partial\tilde{N}}{\partial\alpha} + \frac{\varepsilon}{R^2}\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial\tilde{N}_2}{\partial\alpha} + \frac{1}{R}\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial\beta} - \frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial q}{\partial\alpha},\\
\tilde{Q}_2 &= \frac{ic}{R}\frac{\partial\tilde{N}}{\partial\beta} + \frac{\varepsilon}{R^2}\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial\tilde{N}_2}{\partial\beta} - \frac{1}{R}\frac{\partial\tilde{\Omega}}{\partial\alpha} - \frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial q}{\partial\beta}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя выражения (6) в систему (1), после некоторых преобразований получаем, что третье уравнение с учетом (3) тождественно совпадает с (5), а два последних записываются в виде

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\beta}(\nabla^2\Omega - k^2R^2\tilde{\Omega}) &= -\frac{2}{1-\nu}\Big[-c\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla^2\,\mathrm{Im}\,\tilde{N} + \frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla^2\,\mathrm{Re}\,\tilde{N}_2 -\\
&\quad - \varepsilon\nabla^2\frac{\partial q}{\partial\alpha} - R\frac{\partial}{\partial\alpha}\,\mathrm{Re}\,\tilde{N}_2 + R^2\frac{\partial q}{\partial\alpha}\Big],\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}(\nabla^2\Omega - k^2R^2\tilde{\Omega}) &= \frac{2}{1-\nu}\Big[-c\frac{\partial}{\partial\beta}\nabla^2\,\mathrm{Im}\,\tilde{N} + \frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial}{\partial\beta}\nabla^2\,\mathrm{Re}\,\tilde{N}_2 -\\
&\quad - \varepsilon\nabla^2\frac{\partial q}{\partial\beta} - R\frac{\partial}{\partial\beta}\,\mathrm{Re}\,\tilde{N}_2 + R^2\frac{\partial q}{\partial\beta}\Big],
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\Omega = \mathrm{Re}\,\tilde{\Omega}$; $k^2 = \dfrac{2}{(1-\nu)\,\varepsilon}$.

На основании выражения (7) заключаем, что $\tilde{\Omega}$ — вещественная функция.

Таким образом, задача об определении напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропной круговой цилиндрической оболочки свелась к отысканию комплексной функции $\tilde{\Phi}$ и вещественной Ω, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{gathered}
\nabla^2\nabla^2\tilde{\Phi} + 2ib^2\,(1 - \varepsilon R^{-2}\nabla^2\,\mathrm{Re})\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\tilde{\Phi} = -\,2ib^2\,(1 - \varepsilon R^{-2}\nabla^2)\,Rq,\\
\nabla^2(\nabla^2\Omega - k^2R^2\Omega) = 0.
\end{gathered} \tag{8}$$

При этом усилия и моменты определяются через разрешающие функции по формулам

$$\begin{aligned}
&N_1 = -\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\,\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi},\quad N_2 = -\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\,\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi},\quad S = \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\,\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi},\\
&Q_1 = \frac{c}{R}\frac{\partial}{\partial\alpha}\nabla^2\,\mathrm{Im}\,\tilde{\Phi} - \frac{\varepsilon}{R^2}\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}\,\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi} + \frac{1}{R}\frac{\partial\Omega}{\partial\beta} - \frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial q}{\partial\alpha},\\
&Q_2 = \frac{c}{R}\frac{\partial}{\partial\beta}\nabla^2\,\mathrm{Im}\,\tilde{\Phi} - \frac{\varepsilon}{R^2}\frac{\partial^3}{\partial\beta\partial\alpha^2}\,\mathrm{Re}\,\tilde{\Phi} - \frac{1}{R}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} - \frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial q}{\partial\beta},
\end{aligned} \tag{9}$$

$$M_1 = c\Delta_1 \operatorname{Im}\tilde{\Phi} + \frac{\varepsilon}{R^2}\left[c\Delta_1\nabla^2 \operatorname{Im}\tilde{\Phi} - \frac{\varepsilon}{R}\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + \nu\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}\right)\operatorname{Re}\tilde{\Phi} + \right.$$
$$\left. + (1-\nu)\frac{\partial^2\Omega}{\partial\alpha\partial\beta} - \varepsilon\Delta_1 q\right],$$
$$M_2 = c\Delta_2 \operatorname{Im}\tilde{\Phi} + \frac{\varepsilon}{R^2}\left[c\Delta_2\nabla^2 \operatorname{Im}\tilde{\Phi} - \frac{\varepsilon}{R}\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \nu\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}\right)\operatorname{Re}\tilde{\Phi} - \right.$$
$$\left. - (1-\nu)\frac{\partial^2\Omega}{\partial\alpha\partial\beta} - \varepsilon\Delta_2 q\right],$$
$$H = c(1-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\operatorname{Im}\tilde{\Phi} + \frac{\varepsilon(1-\nu)}{R^2}\left[c\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\operatorname{Im}\tilde{\Phi} - \right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^3\partial\beta}\operatorname{Re}\tilde{\Phi} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)\Omega - \varepsilon\frac{\partial^2 q}{\partial\alpha\partial\beta}\right],$$
где $\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \nu\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$; $\Delta_2 = \nu\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$.

Как видно из уравнений (8), в случае теории оболочек, базирующейся на сдвиговой модели, в отличие от классической теории, кроме наличия в системе второго уравнения для определения функции Ω, изменилось также однородное уравнение для определения комплексной функции $\tilde{\Phi}$. Наличие в нем выражения $2ib^2\varepsilon R^{-2}\nabla^2\operatorname{Re}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\tilde{\Phi}$ существенно изменяет структуру разрешающего уравнения и его решений в различных диапазонах изменения параметра ε. Пренебрежение этим выражением в первом уравнении системы (8) может привести к значительным погрешностям.

В качестве примера рассмотрим замкнутую полубесконечную цилиндрическую трансверсально-изотропную оболочку, нагруженную на торце равномерно распределенными изгибающими моментами M_0, перерезывающими силами Q_0 и свободную от напряжений на бесконечности. В этом случае, используя соотношения между усилиями — моментами и перемещениями [5], после некоторых преобразований систему уравнений (8) приводим к разрешающему уравнению на функцию прогиба w:

$$\frac{d^4 w}{d\alpha^4} - 2g^2\frac{d^2 w}{d\alpha^2} + \lambda^4 w = 0, \qquad (10)$$

где

$$2g^2 = \varepsilon/c^2, \quad \lambda^4 = R^2/c^2; \quad q = 0.$$

Решение уравнения (10), ограниченное на бесконечности, представим в виде

$$w = e^{-s\alpha}(C_1\cos r\alpha + C_2\sin r\alpha) \text{ при } g^2 < \lambda^2,$$
$$w = e^{-s_1\alpha}C_1 + C_2 e^{-s_2\alpha} \text{ при } g^2 > \lambda^2,$$
$$w = e^{-s_3\alpha}(C_1 + \alpha C_2) \text{ при } g^2 = \lambda^2.$$

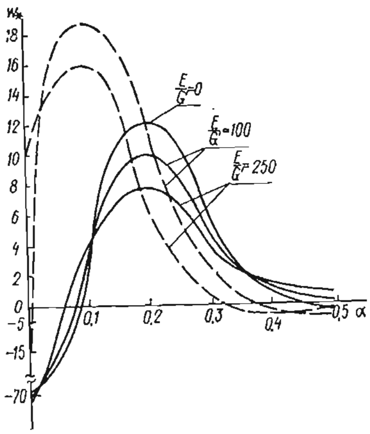
Здесь $s_1 = \sqrt{g^2 + \sqrt{g^4 + \lambda^4}}$; $s_2 = \sqrt{g^2 - \sqrt{g^4 - \lambda^4}}$; $s = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda^2 + g^2}$; $r = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda^2 - g^2}$; $s_3 = g$.

Постоянные C_1, C_2 определяем из условий на торце оболочки $\alpha = 0$:

$$\frac{D}{R^3}\left(\frac{d^3 w}{d\alpha^3} - 2g^2\frac{dw}{d\alpha}\right) = -Q_0, \quad \frac{D}{R^2}\left(\frac{d^2 w}{d\alpha^2} - 2g^2 w\right) = -M_0, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}. \qquad (11)$$

При $g^2 < \lambda^2$ имеем

$$C_1 = -\frac{\lambda^2 + 2sk_0}{\lambda^4}, \quad C_2 = \frac{\lambda^2 s + g^2 k_0}{r\lambda^4}, \quad k_0 = \frac{RQ_0}{M_0}.$$



Для различных значений параметра $\frac{E}{G'}$ вычислены прогибы оболочки w. На рисунке сплошными линиями изображены безразмерные прогибы $w^* = w\frac{R^2}{M_0 D}$, вычисленные на основании решения уравнения (10), штриховыми — соответствующие прогибы в случае, когда в уравнении (10) опущено выражение $2g^2\frac{d^2w}{d\alpha^2}$ или в системе (8) выражение $2ib^2\varepsilon R^{-2}\nabla^2\,\mathrm{Re}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\tilde{\Phi}$. Как видно из графиков, при определенных значениях параметра $\frac{E}{G'}$ пренебрежение указанными величинами приводит к существенным погрешностям и поэтому недопустимо.

1. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек.— Л. : Судпромгиз, 1962.— 430 с.
2. *Осадчук В. А., Ярмошук И. С.* Упругое равновесие замкнутой цилиндрической оболочки с системой периодически расположенных параллельных трещин.— В кн.: Физико-механические поля в деформируемых средах. Киев : Наук. думка, 1978, с. 51—58.
3. *Осадчук В. А., Костенко И. С.* Напряженное состояние пологой цилиндрической оболочки с бесконечным рядом параллельных трещин при симметричной нагрузке.— ФХММ, 1979, № 1, с. 33—38.
4. *Осадчук В. А.* Термоупругое равновесие замкнутой цилиндрической оболочки с поперечной трещиной, на берегах которой задана температура.— В кн.: Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций. Киев : Наук. думка, 1978, с. 132—140.
5. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— Киев : Наук. думка, 1973.— 248 с.
6. *Пелех Б. Л., Лунь Е. М.* Статико-геометрическая аналогия и метод комплексного преобразования в теории упругих оболочек типа Тимошенко.— Докл. АН СССР, 1970, 192, № 6, с. 1239—1240.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.02.79

УДК 539.377

Т. Л. Мартынович, С. И. Кибальникова

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПРЯМОЛИНЕЙНО-АНИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрим плоскую задачу стационарной термоупругости для однородного прямолинейно-анизотропного (относительно упругих и тепловых свойств) тела с некруговой цилиндрической полостью, подверженного тепловому воздействию. Тело отнесено к прямоугольной системе координат $Oxyz$. Координатная плоскость xOy совмещена с поперечным сечением длинного призматического тела или со срединной плоскостью тонкой пластинки с теплоизолированными торцевыми поверхностями. Внешняя граница призматического тела может быть свободной или неподвижно закрепленной.

Пусть нормальное сечение призматического тела (или срединная плоскость пластинки) занимает область S с отверстием, ограниченным простым замкнутым контуром L, который описывается уравнением

$$x + iy = R\left(e^{i\theta} + \sum_{k=1}^{N} C_k e^{-ik\theta}\right)\left(\sum_{k=1}^{N} k\,|C_k| < 1\right). \qquad (1)$$