дится к решению уравнения

$$\frac{1}{16\pi\sqrt{\pi c}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{t}\frac{w_1(\xi,\eta,\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}{4c(t-\tau)}\right\}d\tau d\xi d\eta = f, \qquad (25)$$

которое получено из системы уравнений (18) при $N = 1$, $f_1^+ = f_1^- = f$. Если $f(x, y, t) = f = \mathrm{const}$, то после интегрирования в (25) по η приходим к уравнению, имеющему место для плоского случая.

Располагая плотностями тепловых потенциалов простого и двойного слоев, легко определить напряженное состояние тел с трещинами. С этой целью определяем сначала компоненты напряжений в сплошном теле, обусловленных одним источником или диполем тепла, которые расположены на линии L_i или поверхности S_i. Умножая полученные выражения для напряжений на соответствующие плотности тепловых источников или диполей и интегрируя по контурам L_i или поверхностям S_i, находим напряженное состояние сплошного тела, обусловленное заданной температурой или тепловым потоком. Затем решаем силовую задачу для тела с разрезами, берега которых не контактируют в процессе деформации и нагружены усилиями, равными по величине и противоположными по знаку нормальным σ_{nn} и касательным σ_{sn} напряжениям, имеющим место на контурах L_i (поверхностях S_i) в сплошном теле. Последняя задача решается известными методами [2—4].

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М.: Наука, 1974.— 455 с.
2. *Кит Г. С.* Общий метод решения пространственных задач теплопроводности и термоупругости для тела с дискообразной трещиной.— Прикл. механика, 1977, 13 № 12, с. 18—24.
3. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Смешанная задача для плоскости с криволинейными разрезами.— Докл. АН УССР. Сер. А., 1978, N 3, с. 228—232.
4. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
5. *Нобл Б.* Метод Винера—Хопфа.— М.: Изд-во иностр. лит.: 1962.— 279 с.
6. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения.— М.: Наука, 1974.— 416 с.
7. *Побережный О. В., Кит Г. С.* Об определении температурного поля в пластинке с шайбой при неидеальном тепловом контакте между ними.— Инж.-физ. журн., 1968, 15, № 4, с. 703—709.
8. *Подстригач Я. С., Кит Г. С.* Определение температурных полей и напряжений в окрестности теплопроводящих трещин.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1967, вып. 7, с. 194—201.
9. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев: Наук. думка, 1972.— 308 с.
10. *Сретенский Л. Н.* Теория Ньютоновского потенциала.— М.; Л.: Гостехтеориздат, 1946.—324 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.02.79.

УДК 539.3

М. В. Хай

О СВЕДЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Пусть бесконечное тело, ослабленное плоской трещиной, находится под действием изменяющихся во времени внешних нагрузок, заданных на противоположных $S^{\pm}$ поверхностях трещины. Известно, что в случае статической задачи задача об определении напряжений в теле с трещиной сводится к решению системы трех двумерных интегро-дифференциальных уравнений, из которых определяются функции, характеризующие скачок смещений точек противоположных поверхностей трещины. Требуется свести динамическую задачу теории упругости для бесконечного тела с трещиной к интегральным уравнениям.

Отметим, что известные в литературе результаты [4, 5] показывают, что даже в случае двумерных (плоских и осесимметричных) динамических задач для сведения исходных задач к интегральным уравнениям необходимо преодолеть значительные математические трудности. Причиной этого является существование двух типов волн (продольных и поперечных), которые при наличии в теле трещины взаимно отражаются, и поэтому системе граничных условий задачи нельзя удовлетворить, введя отраженную волну какого-либо одного типа.

Для решения задачи выберем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в произвольной точке области трещины S таким образом, что плоскость x_1Ox_2 совпадает с плоскостью расположения трещины.

Считаем, что противоположным поверхностям $S^{\pm}$ трещины соответствуют значения $x_3 = \pm 0$.

Известно, что решение динамической задачи теории упругости представляется через четыре волновых функции по формуле [1]

$$\vec{U} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \vec{\psi}, \tag{1}$$

где $\vec{U}(u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений; φ и $\vec{\psi}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ — функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta_{123}\varphi = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \Delta_{123}\psi_j = \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi_j}{\partial t^2} \qquad (j = 1,\ 2,\ 3). \tag{2}$$

Здесь Δ_{123} — трехмерный оператор Лапласа; c_1 и c_2 — скорости распространения соответственно продольных и поперечных волн; t — время. Отметим, что между c_1 и c_2 существует зависимость $c_2^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}c_1^2$, где ν — коэффициент Пуассона.

Считаем начальные условия нулевыми, т. е. $\varphi = \psi_j = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\psi_j}{\partial t} = 0$ при $t = 0$, а заданные на поверхностях трещины внешние усилия самоуравновешенными.

Применим к уравнениям (1), (2) интегральное преобразование Лапласа по переменной t и решим задачу в изображениях. Поэтому формулы (1), (2) преобразуем к виду

$$\begin{gathered}\vec{U}^* = \operatorname{grad}\varphi^* + \operatorname{rot}\vec{\psi}^*, \quad \Delta_{123}\varphi^* = \omega_1^2\varphi^*,\\ \Delta_{123}\psi_j^* = \omega_2^2\psi_j^*, \quad \omega_j = \frac{p}{c_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ 3),\end{gathered} \tag{3}$$

где звездочка означает, что рассматриваются изображения по Лапласу от соответствующих функций; p — параметр преобразования, причем считаем, что $\operatorname{Re} p > 0$.

Компоненты напряжений в плоскости трещины определяются через функции φ^* и ψ_j^* по формулам

$$\frac{\sigma_{33}^*}{2G} = \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\psi_2^*}{\partial x_1\partial x_3} - \frac{\partial^2\psi_1^*}{\partial x_2\partial x_3} + \frac{\nu}{1-2\nu}\Delta_{123}\varphi^*,$$

$$\frac{\sigma_{j3}^*}{2G} = \frac{\partial^2\varphi^*}{\partial x_j\partial x_3} - \frac{(-1)^j}{2}\left(\frac{\partial^2\psi_{3-j}^*}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2\psi_{3-j}^*}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2\psi_j^*}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\psi_3^*}{\partial x_{3-j}\partial x_3}\right) \quad (j = 1,\ 2),$$

где G — модуль сдвига.

Если на поверхностях трещины заданы только нормальные усилия, то $\sigma_{13}^* = \sigma_{23}^* = 0$ в плоскости расположения трещины, а $u_3^* = 0$ лишь в области

S^*, дополняющей S до полной плоскости. Когда на поверхностях трещины заданы касательные усилия, то в плоскости расположения трещины $\overset{*}{\sigma}_{33} = 0$, а в области S^* равны нулю перемещения $\overset{*}{u}_1$ и $\overset{*}{u}_2$. Для удовлетворения этим условиям положим

$$\varphi^* = \Phi + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_3}, \quad \overset{*}{\psi}_j = \Psi_j + \frac{\partial \psi_{j0}}{\partial x_3} \qquad (j = 1,\ 2,\ 3), \tag{4}$$

где Φ, Ψ_j, φ_0 и ψ_{j0} — функции, удовлетворяющие соответствующим уравнениям (3).

Решение (3) с учетом (4) содержит восемь произвольных функций, однако определить их надо таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия задачи. С этой целью определим функции ψ_{30} и Ψ_3 следующим образом:

$$\frac{\partial \psi_{30}}{\partial x_3} = \frac{\partial \psi_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x_2}, \quad \Psi_3 = 0. \tag{5}$$

Тогда с учетом формул (3) — (5) выражения для перемещений и напряжений $\overset{*}{\sigma}_{j3}$ преобразуем к виду

$$\overset{*}{u}_j = (-1)^j \frac{\partial \Psi_{3-j}}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_j \partial x_3} + (-1)^j \left(\frac{\partial^2 \psi_{(3-j)0}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \psi_{(3-j)0}}{\partial x_{3-j}^2} - \frac{\partial^2 \psi_{j0}}{\partial x_1 \partial x_2} \right)$$

$$(j = 1,\ 2),$$

$$\overset{*}{u}_3 = \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_3^2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_{10}}{\partial x_2} \right), \tag{6}$$

$$\frac{\overset{*}{\sigma}_{33}}{2G} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \Delta_{123} \Phi + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(\frac{\partial \psi_{20}}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_{10}}{\partial x_2} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_3^2} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \Delta_{123} \varphi_0 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right),$$

$$\frac{\overset{*}{\sigma}_{j3}}{2G} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \frac{(-1)^j}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{(3-j)0}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \psi_{(3-j)0}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 \psi_{(3-j)0}}{\partial x_{3-j}^2} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x_j \partial x_3^2} + \frac{(-1)^j}{2} \left[\frac{\partial^2 \Psi_{3-j}}{\partial x_3^2} + (-1)^j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right) \right] \right] \quad (j = 1,\ 2).$$

Из формул (6) видно, что когда на поверхностях трещины заданы только нормальные внешние усилия, можно положить $\Psi_1 = \Psi_2 = \varphi_0 = 0$, а остальные функции определить таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\Phi + \frac{\partial \psi_{20}}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_{10}}{\partial x_2} \right)_{x_3 = 0} = 0, \quad (x_1,\ x_2) \in S^*,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + \frac{(-1)^j}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_{(3-j)0}}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \psi_{(3-j)0}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial^2 \psi_{(3-j)0}}{\partial x_{3-j}^2} \right) \right]_{x_3=0} = 0, \qquad (x_1,\ x_2) \in$$

$$\in S \cup S^*, \quad (j = 1,\ 2). \tag{7}$$

Когда на поверхностях трещины заданы касательные усилия, то граничные условия в областях $S \cup S^*$ и S^* будут выполняться, если положить $\Phi = \psi_{10} = \psi_{20} = 0$, а функции Ψ_j и φ_0 определить таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j} + (-1)^j \Psi_{3-j} \right]_{x_3=0} = 0, \quad (x_1,\ x_2) \in S^* \quad (j = 1,\ 2), \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x_3^2} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \Delta_{123} \varphi_0 + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_2} \right]_{x_3=0} = 0, \quad (x_1,\ x_2) \in S \cup S^*. \end{gathered} \tag{8}$$

Граничные условия (7) и (8) в областях S^* будут удовлетворяться тождественно, если функции Ψ_j, Φ, φ_0 и ψ_{j0}, являющиеся решением соответствующих уравнений (3), выбрать в виде потенциалов

$$\Phi = \iint\limits_S \frac{\alpha_3(\xi)\, e^{-\omega_1|x-\xi|}}{|x-\xi|} d_\xi S, \quad \varphi_0 = \iint\limits_S \frac{\alpha_{30}(\xi)\, e^{-\omega_1|x-\xi|}}{|x-\xi|} d_\xi S,$$

$$\Psi_j = \iint\limits_S \frac{\alpha_j(\xi)\, e^{-\omega_2|x-\xi|}}{|x-\xi|} d_\xi S, \quad \psi_{j0} = \iint\limits_S \frac{\alpha_{j0}(\xi)\, e^{-\omega_2|x-\xi|}}{|x-\xi|} d_\xi S \quad (j = 1,\ 2), \qquad (9)$$

где $\alpha_j(\xi)$ и $\alpha_{j0}(\xi)$ — произвольные плотности потенциалов; x — точка тела с координатами $(x_1,\ x_2,\ x_3)$; ξ — точка поверхности трещины с координатами $(\xi_1,\ \xi_2,\ 0)$ в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

При таком выборе функций Φ, Ψ_j, φ_0 и ψ_{j0} условия излучения на бесконечности [3] выполняются тождественно. Однако граничные условия задачи в области $S \cup S^*$ (равенство нулю в плоскости расположения трещины напряжений σ_{33} или σ_{13} и σ_{23}) не выполняются. Они будут выполняться лишь в том случае, когда плотности потенциалов (9) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left(\Delta_{12} - \frac{\omega_2^2}{2}\right)\alpha_{j0}(x_1,\ x_2) = \delta_{j3}\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\alpha_1}{\partial x_2}\right) -$$

$$- (-1)^j (1 - \delta_{j3}) \frac{\partial\alpha_3}{\partial x_{3-j}} \qquad (j = 1,\ 2,\ 3), \qquad (10)$$

где Δ_{12} —двумерный оператор Лапласа.

Можно показать, что система уравнений (10) будет выполняться тождественно, если определить α_{j0} и α_j через произвольные функции β_j по формулам

$$\alpha_j = -(-1)^j \frac{2}{\omega_2^2} \frac{\partial}{\partial x_{3-j}} \left(\frac{\partial\beta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\beta_1}{\partial x_2}\right) + \beta_j \qquad (j = 1,\ 2),$$

$$\alpha_3 = -\frac{2}{\omega_2^2}\left(\frac{\partial^2\beta_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\beta_3}{\partial x_2^2}\right) + \beta_3,$$

$$\alpha_{30} = -\frac{2}{\omega_2^2}\left(\frac{\partial\beta_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\beta_1}{\partial x_2}\right), \quad \alpha_{j0} = (-1)^j \frac{2}{\omega_2^2} \frac{\partial\beta_3}{\partial x_{3-j}} \qquad (j = 1,\ 2).$$

Функции β_j характеризуют скачок смещений точек противоположных поверхностей трещины, поэтому должны равняться нулю на ее контуре. Если обозначить

$$F_j = \iint\limits_S \frac{\beta_j(\xi)\, e^{-\omega_1|x-\xi|}}{|x-\xi|} d_\xi S, \quad P_j = \iint\limits_S \frac{\beta_j(\xi)\, e^{-\omega_2|x-\xi|}}{|x-\xi|} d_\xi S, \qquad (11)$$

то выражения для перемещений и напряжений, удовлетворяющих граничным условиям в областях S^* и $S \cup S^*$, представим через потенциалы F_j и P_j в виде

$$u_j^* = \frac{\partial F_3}{\partial x_j} + (-1)^j \frac{\partial P_{3-j}}{\partial x_3} + 2\frac{\partial P_3}{\partial x_j} - \frac{2}{\omega_2^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\Delta_{12}(F_3 - P_3) + \frac{\partial W}{\partial x_3}\right]$$

$$(j = 1,\ 2),$$

$$u_3^* = \frac{\partial F_3}{\partial x_3} + \frac{\partial P_1}{\partial x_2} - \frac{\partial P_2}{\partial x_1} - \frac{2}{\omega_2^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\Delta_{12}(F_3 - P_3) + \frac{\partial W}{\partial x_3}\right],$$

$$\frac{\sigma_{33}^*}{2G} = \frac{2}{\omega_2^2}\left[\Delta_{12}(\Delta_{12} - \omega_2^2)(F_3 - P_3) + \frac{\omega_2^4}{4}F_3 + \left(\Delta_{12} - \frac{\omega_2^2}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial x_3}\right],$$

$$\frac{\sigma_{j3}^*}{2G} = \frac{2}{\omega_2^2}\left\{(-1)^j\left[\left(\Delta_{12} - \frac{\omega_2^2}{2}\right)^2 P_{3-j} - \Delta_{12}(\Delta_{12} - \omega_1^2) F_{3-j} -\right.\right.$$

$$-\left(\Delta_{12}-\frac{3\omega_2^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_{3-j}}\left(\frac{\partial P_2}{\partial x_2}+\frac{\partial P_1}{\partial x_1}\right)+(\Delta_{12}-\omega_1^2)\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)\Bigg]-$$

$$-\left(\Delta_{12}-\frac{\omega_2^2}{2}\right)\frac{\partial^2(F_3-P_3)}{\partial x_j\partial x_3}\Bigg\}\qquad (j=1,\ 2), \qquad (12)$$

$$\frac{\sigma_{12}^*}{2G}=\frac{2}{\omega_2^2}\left\{-(\Delta_{12}-\omega_2^2)\frac{\partial^2(F_3-P_3)}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{\omega_2^2}{2}\left[\frac{\partial^2F_3}{\partial x_1\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}-\frac{\partial P_2}{\partial x_2}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^3 W}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}\right\},$$

$$\frac{\sigma_{jj}^*}{2G}=\frac{2}{\omega_2^2}\left\{-\left(\Delta_{12}-\frac{\omega_2^2}{2}\right)\left(\frac{\nu\omega_1^2}{1-2\nu}+\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\right)F_3+(\Delta_{12}-\omega_2^2)\frac{\partial^2P_3}{\partial x_j^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[(-1)^j\frac{\omega_2^2}{2}\frac{\partial P_{3-j}}{\partial x_j}-\frac{\nu\omega_1^2}{1-2\nu}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)-\frac{\partial^2W}{\partial x_j^2}\right]\right\}\qquad (j=1,\ 2),$$

где функция W определяется через P_j и F_j соотношением

$$W=\frac{\partial(F_2-P_2)}{\partial x_1}-\frac{\partial(F_1-P_1)}{\partial x_2}.$$

На простых примерах легко убедиться в том, что перемещения в теле с трещиной будут непрерывными, если функции β_j представить в виде

$$\beta_j=\sqrt{L(x_1,\ x_2)}\ \beta_j^0(x_1,\ x_2),$$

где $L(x_1, x_2)$ — функция, характеризующая уравнение контура трещины, т. е. $L(x_1, x_2)=0$, когда x_1 и x_2 принадлежат контуру трещины; $\beta_j^0(x_1, x_2)$ — произвольные ограниченные функции.

Располагая формулами (12), из условия, что напряжения σ_{j3} ($j=1, 2, 3$) на поверхностях трещины равняются заданным, получаем интегральные уравнения для определения β_j. Эти уравнения после несложных преобразований представим в виде

$$\Delta_{12}(\Delta_{12}-\omega_2^2)\iint\limits_S\frac{\beta_3(\xi)\left[e^{-\omega_1|x-\xi|}-e^{-\omega_2|x-\xi|}\right]}{|x-\xi|}d_\xi S+\frac{\omega_2^4}{4}\iint\limits_S\frac{\beta_3(\xi)\,e^{-\omega_1|x-\xi|}}{|x-\xi|}d_\xi S=$$

$$=-\frac{\omega_2^2N_3^*}{4G},$$

$$\Delta_{12}(\Delta_{12}-\omega_2^2)\iint\limits_S\frac{\beta_{3-j}(\xi)\left[e^{-\omega_1|x-\xi|}-e^{-\omega_2|x-\xi|}\right]}{|x-\xi|}d_\xi S-$$

$$-\frac{\omega_2^4}{4}\iint\limits_S\frac{\beta_{3-j}(\xi)\,e^{-\omega_2|x-\xi|}}{|x-\xi|}d_\xi S-\left(\Delta_{12}-\frac{3\omega_2^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x_{3-j}}\iint\limits_S\left[\beta_2(\xi)\frac{\partial}{\partial x_2}+\right.$$

$$\left.+\beta_1(\xi)\frac{\partial}{\partial x_1}\right]\frac{e^{-\omega_1|x-\xi|}-e^{-\omega_2|x-\xi|}}{|x-\xi|}d_\xi S+\frac{\omega_2^2}{2}\iint\limits_S\left[\beta_{3-j}(\xi)\left(\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_{3-j}^2}\right)-\frac{1+\nu}{2(1-\nu)}\beta_j(\xi)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]\frac{e^{-\omega_1|x-\xi|}}{|x-\xi|}d_\xi S=\frac{(-1)^j\,\omega_2^2N_{3-j}^*}{4G}\qquad (13)$$

$$(j=1,\ 2),\qquad x\in S,$$

где N_3^* — нормальные, N_1^* и N_2^* — касательные (N_j^* направлены вдоль осей Ox_j) внешние усилия в изображениях Лапласа.

Если устремить ω_1 и ω_2 к нулю, то из формул (13) получим интегральные уравнения, совпадающие с известными в литературе для статической задачи [2].

Выражения (12) могут быть использованы для построения динамического потенциала теории упругости, с применением которого можно свести динамическую задачу теории упругости для бесконечного тела с трещиной, размещенной по произвольной поверхности, к интегральным уравнениям.

Если обозначить через S произвольную поверхность, на которой задан скачок смещений $\vec{\beta}$ противоположных ее точек, а через $\vec{U}$ — вектор перемещений, обусловленный этим скачком, то, опуская все промежуточные выкладки, выражение динамического потенциала теории упругости двойного слоя первого рода представляем в виде

$$\vec{U}(x) = \iint\limits_S \Gamma^{\mathrm{I}}_{2p}(x, \xi)\, \vec{\beta}(\xi)\, d_\xi S, \tag{14}$$

где $\vec{U}(u_1, u_2, u_3)$ и $\vec{\beta}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — трехкомпонентные векторы; $\Gamma^{\mathrm{I}}_{2p}(x, \xi)$ — квадратная матрица размерности 3×3 с элементами

$$\Gamma^{\mathrm{I}}_{2pij}(x, \xi) = \left(-\delta_{ij}\frac{\partial}{\partial n^+_\xi} - n_{i\xi}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{e^{-\omega_2|x-\xi|}}{|x-\xi|} - \frac{\nu}{1-\nu}\eta_{j\xi}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{e^{-\omega_1|x-\xi|}}{|x-\xi|} +$$
$$+ \frac{2}{\omega_2^2}\frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial n^+_\xi}\frac{e^{-\omega_2|x-\xi|} - e^{-\omega_1|x-\xi|}}{|x-\xi|} \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Здесь (x_1, x_2, x_3) — декартовы координаты точки x, выбранной в произвольной точке тела; (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — координаты произвольной точки поверхности S в этой же системе координат; $\eta_{j\xi}$ $(j = 1, 2, 3)$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S^+ в точке ξ; $\dfrac{\partial}{\partial n^+_\xi}$ — производная по нормали к поверхности S^+ в точке ξ. Индекс $+$ означает, что рассматривается нормаль к поверхности S^+, где S^+ и S^- — противоположные поверхности разреза, проведенного по поверхности S.

Потенциал (14) обладает свойствами гармонического потенциала двойного слоя и определяет перемещения в теле, обусловленные скачком смещений противоположных точек, заданных на произвольной поверхности S (замкнутой или разомкнутой). Обусловленные потенциалом (14) усилия на противоположных сторонах поверхности S являются самоуравновешенными. Поэтому его можно использовать для сведения динамической задачи теории упругости для бесконечного тела с трещиной, размещенной по произвольной поверхности S, к интегральным уравнениям.

Легко убедиться в том, что при $\omega_1 = \omega_2 = 0$ потенциал (14) совпадает с статическим потенциалом теории упругости двойного слоя первого рода [6].

Отметим, что сказанное выше имеет место, когда рассматривается случай установившихся колебаний, т. е. когда заданные внешние усилия представляются в виде $N_j = N_j^*(x)\, e^{-ikt}$, где k — частота колебаний. Учитывая формулы (2), (3), убеждаемся в том, что задача об определении амплитуды компонент перемещений и напряжений сводится к интегральным уравнениям (13), если в последних заменить ω_1 на $-ik_1$, ω_2 на $-ik_2$, где $k_1 = \dfrac{k}{c_1}$, $k_2 = \dfrac{k}{c_2}$.

Заменяя ω_1 на $-ik_1$, ω_2 на $-ik_2$ в выражении (15), из (14) получаем потенциал двойного слоя первого рода установившихся колебаний. Анализируя матрицу этого потенциала, замечаем, что она является матрицей, сопряженной к матрице, приведенной в работе [3], названной сингулярным решением задачи теории упругости установившихся колебаний. Поэтому в теории динамических задач установившихся колебаний, как и в статических задачах, можно рассматривать три потенциала, которые обладают различными свойствами. Это потенциал простого слоя, матрицей которого является матрица Купрадзе, потенциал двойного слоя первого рода с матрицей, определяемой формулами (14), (15), если в этих формулах заменить ω_1 на $-ik_1$, ω_2 на $-ik_2$, и потенциал двойного слоя второго рода с матрицей, приведенной в работе [3] и названной сингулярным решением динамической задачи установившихся колебаний.

Для решения динамических задач установившихся колебаний для бесконечного тела с трещиной, размещенной по произвольной поверхности, достаточно пользоваться лишь потенциалом двойного слоя первого рода, когда заданные на поверхностях трещины внешние усилия самоуравновешенные. В случае несамоуравновешенных внешних усилий решение необходимо искать в виде суммы потенциала двойного слоя первого рода и потенциала простого слоя.

1. *Амензаде Ю. А.* Теория упругости.— М. : Высш. школа, 1976.— 272 с.
2. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
3. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости.— М. : Наука, 1976.— 663 с.
4. *Панасюк В. В., Андрейков А. Е., Ковчик С. Е.* Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов.— Киев : Наук. думка, 1977. — 277 с.
5. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения.— М. : Наука, 1974.— 416 с.
6. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости.— М. : Наука, 1977.— 312 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
16.02.79

УДК 539.377

Ю. М. Коляно, Е. Г. Иваньк

ТЕПЛОВОЙ УДАР ПО ПОВЕРХНОСТИ СОСТАВНОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Пусть к поверхности $z = \delta$ свободно опертой круглой пластины радиуса R с покрытием толщины ε внезапно подводится тепловой поток q. Поверхности пластины $z = -\delta$, $r = R$ предполагаются теплоизолированными (рис. 1).

Физико-механические характеристики такой системы представим через асимметричную единичную функцию в виде

$$p(z) = p_2 + (p_1 - p_2)\, S_-(z - \delta_1), \quad (1)$$

где p_2 и p_1 — соответственно характеристики пластины и покрытия; $\delta_1 = \delta - \varepsilon$; $S_-(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \geqslant 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$

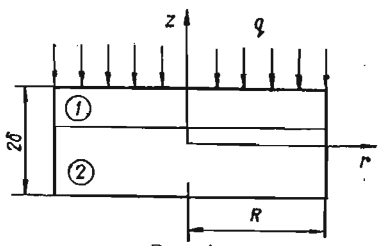

Рис. 1

При указанных условиях нестационарное температурное поле определяется из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(z)\,\frac{\partial t}{\partial z}\right] = c_v(z)\,\frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (2)$$

где λ — коэффициент теплопроводности; c_v — объемная теплоемкость; τ — время.

Краевые условия примем в виде

$$\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z=\delta} = \frac{q}{\lambda_1} S_+(\tau), \quad \left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z=-\delta} = 0, \quad t|_{\tau=0} = 0, \quad (3)$$

где $S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leqslant 0. \end{cases}$