УДК 536.12 : 62—503.55

А. В. Костенко

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НАГРЕВОМ ЦИЛИНДРА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ПЕРЕПАД ТЕМПЕРАТУР

В практике часто возникает потребность в быстром и качественном нагреве тел при ограничениях на различные параметры — градиенты температурного поля, температурные напряжения, перепад температур по толщине детали и др. [1, 2, 4]. С целью определения оптимального по быстродействию управления нагревом полого цилиндра при ограничении на перепад температур рассмотрим следующую задачу. Пусть теплообмен неограниченного полого цилиндра с окружающей средой осуществляется по закону Ньютона

$$\frac{\partial T(1,\ \tau)}{\partial \rho} + (-1)^l H_1 [T(1,\ \tau) - t(\tau)] = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T(k,\ \tau)}{\partial \rho} - (-1)^l H_0 [T(k,\ \tau) - g(\tau)] = 0, \tag{2}$$

где $t(\tau)$ — функция управления, ограниченная сверху предельно возможным управлением $u(\tau)$:

$$t(\tau) \leqslant u(\tau). \tag{3}$$

Требуется найти такое управление $t(\tau)$, удовлетворяющее неравенству (3), чтобы при ограничении на перепад температур

$$T(1,\ \tau) - T(k,\ \tau) \leqslant S(T^*) \tag{4}$$

за минимальное время τ_0 перевести цилиндр из начального состояния

$$T(\rho,\ 0) = f(\rho) \tag{5}$$

в конечное с максимальной температурой T_0 на поверхности $\rho = 1$:

$$T(1,\ \tau_0) = T_0 \quad (f(\rho) < T_0 < u(\tau_0)). \tag{6}$$

Температурное поле при этом удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho} = \frac{\partial T}{\partial \tau}. \tag{7}$$

Здесь $l = 0$, $0 < k = R_1/R_2 < 1$, $R = R_2$ при управляемом нагреве на наружной поверхности цилиндра; $l = 1$, $k = R_2/R_1 > 1$, $R = R_1$ при управляемом нагреве на внутренней поверхности цилиндра; R_1, R_2 — внутренний и наружный радиусы цилиндра; $\tau = a\tau^*/R^2$ — безразмерное время; τ^* — время; $\rho = r/R$; $H_j = \alpha_j R/\lambda$ $(j = 0, 1)$; a, α_j, λ — коэффициенты температуропроводности, теплообмена и теплопроводности; $S(T^*)$ — предельно допустимый перепад температур по толщине цилиндрической стенки, являющийся функцией от среднеинтегральной температуры

$$T^*(\tau) = \frac{2}{1 - k^2}\int_k^1 \rho T(\rho,\ \tau)\, d\rho.$$

Температурный режим $T(\rho,\ \tau)$ будет оптимальным по быстродействию, если нагрев цилиндра происходит по границе одного из ограничений (3), (4), т. е. при следующих условиях:

$$t(\tau) = u(\tau), \tag{8}$$

$$T(1,\ \tau) - T(k,\ \tau) \leqslant S(T^*) \tag{9}$$

либо

$$t(\tau) \leqslant u(\tau), \tag{10}$$

$$T(1,\ \tau) - T(k,\ \tau) = S(T^*). \tag{11}$$

Естественно предположить, что

$$f(1) - f(k) < S(T^*(0)).$$

Тогда в начальный период нагрева температурный режим будет удовлетворять условиям (8), (9). В этом случае оптимальное управление $t(\tau)$ равно предельно возможному $u(\tau)$, а температурный режим является решением классической задачи теплопроводности (1), (2), (5), (7) при условии (8). Пусть при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ ($\tau_2 > \tau_1 > 0$) выполняется равенство (11). Тогда оптимальное управление $t(\tau)$ при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ должно обеспечивать выполнение равенства (11). Если удается определить температурный режим $T(\rho, \tau)$, удовлетворяющий равенству (11), то оптимальное управление $t(\tau)$, обеспечивающее этот режим, найдем из граничного условия (1).

Аппроксимировав предельно допустимый перепад температур в отдельных интервалах среднеинтегральной температуры линейными функциями $S(T^*) = b + cT^*$, для определения предельно допустимого температурного режима $T(\rho, \tau)$ рассмотрим решение уравнения (7) при краевых условиях (2), (5) и граничном условии

$$T(1, \tau) - T(k, \tau) = b(\tau) + q\int_k^1 \rho T(\rho, \tau)\, d\rho, \tag{12}$$

где для большей общности $b = b(\tau)$, а $q = 2c/(1 - k^2)$.

Предполагая температурный режим непрерывным при $(\rho, \tau) \in [k, 1] \times \times [\tau_1, \tau_2]$, $b(\tau)$ непрерывно дифференцируемой при $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$, можно получить условие, эквивалентное условию (12). Для этого продифференцируем условие (12) по τ. Учитывая, что $T(\rho, \tau)$ удовлетворяет уравнению (7), получаем

$$\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial T(k, \tau)}{\partial \tau} - q\left[\frac{\partial T(1, \tau)}{\partial \rho} - k\,\frac{\partial T(k, \tau)}{\partial \rho}\right] = b'(\tau). \tag{13}$$

Известно [3], что решение задачи (2), (5), (7), (13) существует и единственно. Применяя метод интегрального преобразования Лапласа, представляем его в виде

$$T(\rho, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\tau [hg(\tau - \eta)\, T_1(\rho, \eta) + b(\tau - \eta)\, T_2(\rho, \eta)]\, d\eta + T_3(\rho, \tau),$$

где

$$T_j(\rho, \tau) = \frac{\varphi_j(\rho)}{\omega_1}\left(\tau - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) + \psi_j(\rho) + m\Phi_j(\gamma, \rho, \tau) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{s} \Phi_j(i\lambda_n, \rho, \tau) + 2\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\nu} \Phi_j(p_n, \rho, \tau);$$

$$\Phi_j(x, \rho, \tau) = F_j(x)\,\frac{w(x, \rho)}{\Delta(x)}\exp(x^2\tau) \quad (j = 1, 2, 3);$$

$$F_1(x) = \frac{x[K_0(xk) - K_0(x)] + q[kK_1(xk) - K_1(x)]}{x[hK_0(xk) + xK_1(xk)]};$$

$$F_2(x) = 1;$$

$$F_3(x) = (-1)^l\int_k^1 \{q - x[qK_1(x) + xK_0(x)]\, I_0(x\rho) -$$

$$- x[qI_1(x) - xI_0(x)]\, K_0(x\rho)\}\, \rho f(\rho)\, d\rho; \tag{14}$$

$$w(x, \rho) = 2x\,\{[hK_0(xk) + xK_1(xk)]\, I_0(x\rho) - [hI_0(xk) - xI_1(xk)]\, K_0(x\rho)\};$$

$$\Delta(x) = [(x^2 + 2q)\, I_1(x) - xqI_0(x)]\,[hK_0(xk) + xK_1(xk)] -$$

$$- kx[xI_0(x) - qI_1(x)]\,[hK_1(xk) + xK_0(xk)] + [(x^2 + 2q)\, K_1(x) + xqK_0(x)] \times$$

$$\times [hI_0(xk) - xI_1(xk)] - kx[xK_0(x) + qK_1(x)]\,[hI_1(xk) - xI_0(xk)] - 2qh/x;$$

$h = (-1)^l H_0$; $I_0(x)$, $I_1(x)$, $K_0(x)$, $K_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя; $\gamma > 0$ — действительный корень уравнения

$$\left[I_0(\gamma) - \frac{q}{\gamma} I_1(\gamma)\right][hK_0(\gamma k) + \gamma K_1(\lambda k)] + qh/\gamma^2 -$$
$$- \left[K_0(\gamma) + \frac{q}{\gamma} K_1(\gamma)\right][hI_0(\gamma k) - \gamma I_1(\gamma k)] - \frac{1}{k} = 0; \tag{15}$$

$i\lambda_n$ ($\lambda_n > 0$, $i = \sqrt{-1}$) — мнимые корни уравнения (15); $p_n = \alpha_n + i\beta_n$ ($\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$) — комплексные корни уравнения (15).

Из анализа уравнения (15) следует, что для параметров q, h, k, удовлетворяющих соотношению

$$2k\omega_0 = kh(q-2)\ln k + c(kh-2) = 0,$$

уравнение имеет нулевой корень. Тогда

$$\varphi_j(\rho) = z_j(\rho) \quad (j = 1,\ 2), \quad \varphi_3(\rho) = 0,$$

$$\psi_1(\rho) = \frac{1}{64\omega_1}\left\{k^2[16 - 4q(k^2 + 2\rho^2)]\ln\frac{\rho}{k} - [16 - 4q(1 + 2\rho^2)]\ln\rho -\right.$$
$$\left.-(1-k^2)[8q\rho^2 - 5q(1+k^2) - 16] - 64\ln k\right\},$$

$$\psi_2(\rho) = \frac{1}{4\omega_1}\left\{[h(k^2+\rho^2) - 2k]\ln\frac{\rho}{k} + (\rho^2 - k^2)\left(\frac{1}{k} - \frac{h}{2}\right)\right\},$$

$$\psi_3(\rho) = (-1)^l\frac{z_2(\rho)}{4\omega_1}\int\limits_k^1 [q(1-\rho^2) + 2(q-2)\ln\rho]\rho f(\rho)\,d\rho,$$

$$64k\omega_1 = 4k[2k(q-2)(kh-2) + (q-4)h]\ln k +$$
$$+ (1-k^2)[16(1-kh) - 4q(1+k^2) + khq(5+k^2)],$$

$$2304k\omega_2 = 6k[3k^3(hk-4)(q-2) + h(q-6) + 6k(q-4)(kh-2)]\ln k +$$
$$+ (1-k^2)[36(5k^2+1) - 64kh(1+k^2) - 6q(k^4 + 10k^2 + 1) +$$
$$+ khq(k^4 + 19k^2 + 10)].$$

Если $\omega_0 \neq 0$, то

$$\varphi_j(\rho) = 0 \quad (j = 1,\ 2,\ 3), \quad \psi_j(\rho) = \frac{z_j(\rho)}{\omega_0} \quad (j = 1,\ 2), \quad \psi_3(\rho) = 0.$$

Здесь

$$z_1(\rho) = \frac{q}{4}(1-k^2)(1 + 2\ln\rho) + \left(\frac{q}{2}k^2 - 1\right)\ln k;$$

$$z_2(\rho) = \frac{1}{k} + h\ln\frac{\rho}{k}.$$

Анализ ненулевых корней уравнения (15) показывает, что при $0 < k < 1$ ($l = 0$) для любых практически оправданных параметров q, h уравнение имеет счетное множество простых комплексных корней p_n ($\nu = \infty$), конечное множество мнимых корней $i\lambda_n$ ($0 < s < \infty$) либо не имеет их вовсе ($s = 0$).

При $k > 1$ ($l = 1$) уравнение (15) имеет счетное множество простых мнимых корней $i\lambda_n$ ($s = \infty$), может иметь конечное множество простых комплексных корней p_n ($0 < \nu < \infty$) либо не иметь их вовсе ($\nu = 0$), например, при $cH_0 = 0$. Уравнение (15) для любых оправданных параметров при

$$c > 2kk_1h\ln k/[2kh\ln k + k_1(kh-2)] \quad (k_1 = 1 - k^2)$$

имеет единственный простой действительный корень $\gamma > 0$ ($m = 1$), а в противоположном случае не имеет действительных корней ($m = 0$).

На рис. 1 показан характер изменения корней уравнения (15) при $H_0 = 0$; $k = 0{,}5$ ($l = 0$), $c \in [-32,\ 32]$, а на рис. 2 — характер изменения корней того же уравнения при $H_0 = 10$, $k = 2$ ($l = 1$), $c \in [-32,\ 32]$.

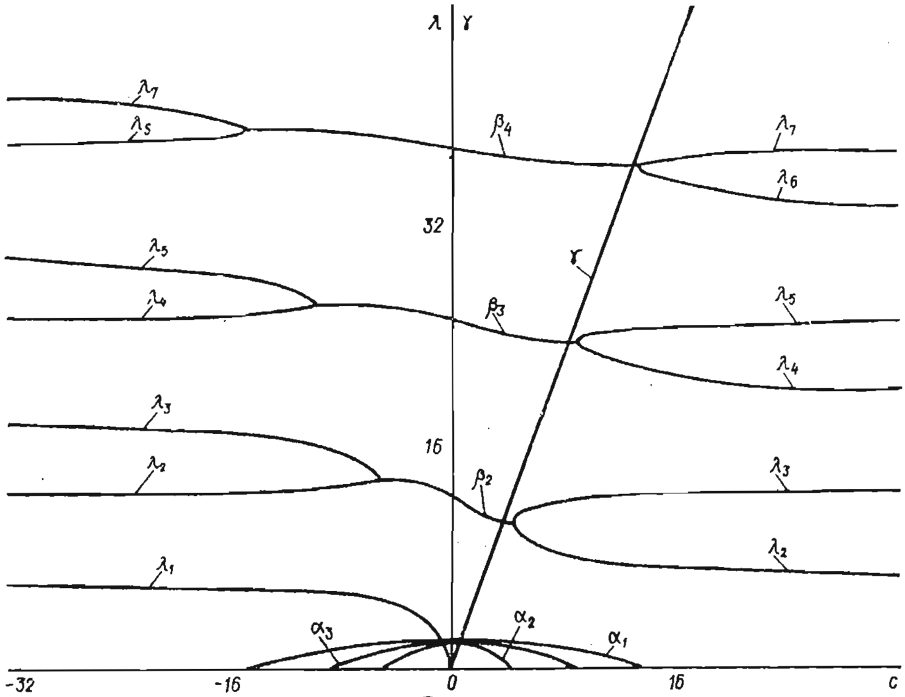

Рис. 1

Уравнение (15) также может иметь двукратные мнимые корни. Тогда соответствующие этому корню члены в (14) заменяются на

$$\frac{\exp(-\lambda_n^2\tau)}{v_1(\lambda_n)}\{[\tau+v_2(\lambda_n)]E_i(\rho,\ \lambda_n)+E_i'(\rho,\ \lambda_n)\},$$

где $v_1(\lambda_n)$, $v_2(\lambda_n)$, $E_i(\rho,\ \lambda_n)$, $E_i'(\rho,\ \lambda_n)$ — известные функции (не приведенные с целью сокращения).

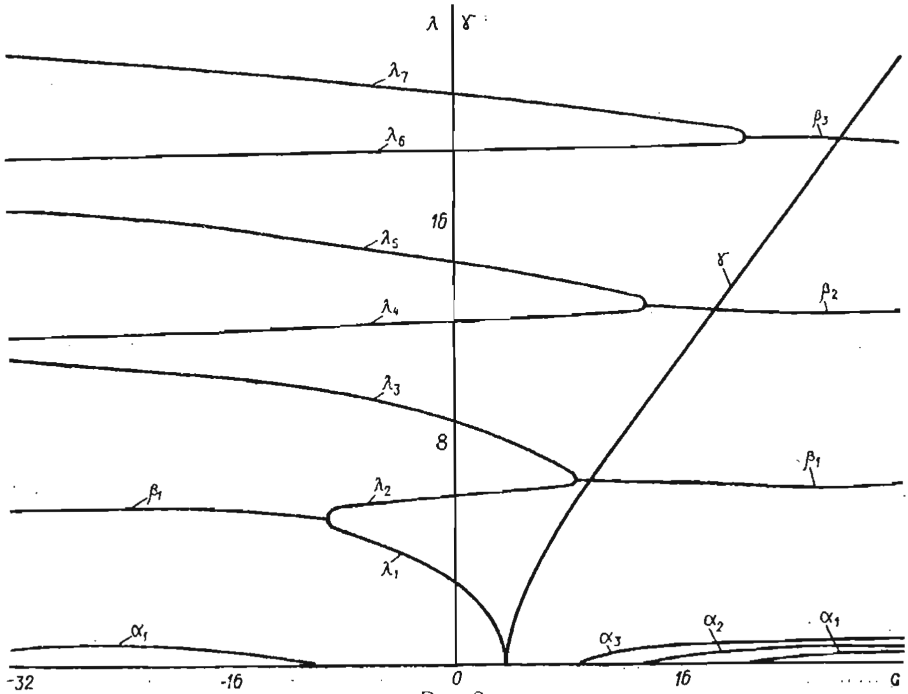

Рис. 2

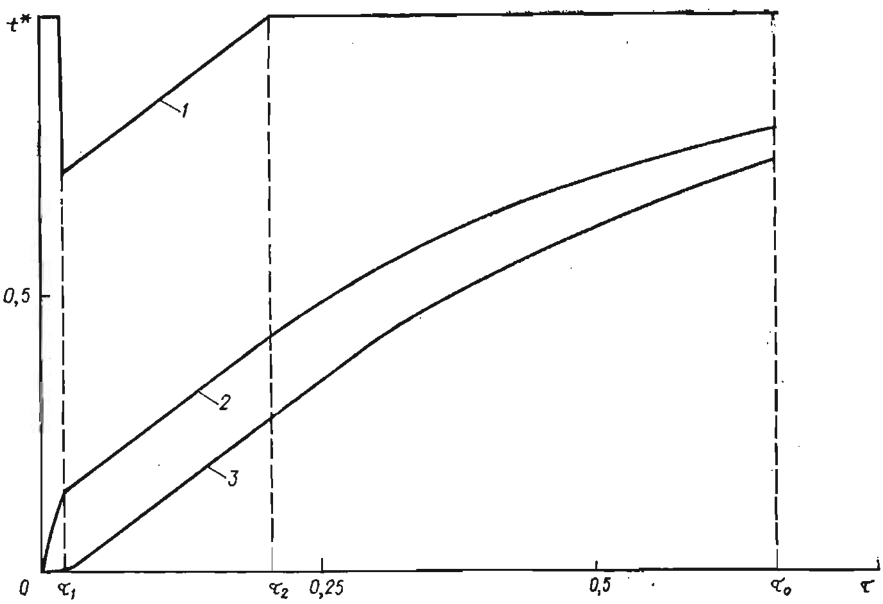

Рис. 3

Итак, предельно допустимый режим $T(\rho, \tau)$ построен для любых практически оправданных параметров k, q, h. Оптимальное управление $t(\tau)$, обеспечивающее этот режим, нетрудно определить из граничного условия (1).

В некоторый момент времени $\tau_2 > \tau_1$ может снова выполняться равенство (8). Происходит переключение управления на ограничения (8), (9), время переключения управления τ_2 определяется из равенства (8). Время отключения управления определяется из условий конечной цели нагрева (6).

В качестве примера, иллюстрирующего применение описанного подхода к решению задач оптимального управления, на рис. 3 и 4 показано оптимальное управление $t^*(\tau) = t(\tau)/u_0$ (кривая *1*) и температуры поверхностей цилиндра $T(\rho, \tau)/u_0$ ($\rho = 1$, k — соответственно кривые *2* и *3*) при $u(\tau) = u_0 = \text{const}$, $S(T^*) = 0{,}15\, u_0$, $H_0 = 0$, $H_1 = 1$, $T_0 = 0{,}8 u_0$, $k = 0{,}5$ ($l = 0$, рис. 3) и $k = 2$ ($l = 1$, рис. 4). Как видно из рис. 3 и 4, оптимальное управление нагревом цилиндра трехступенчатое. При этом на первом

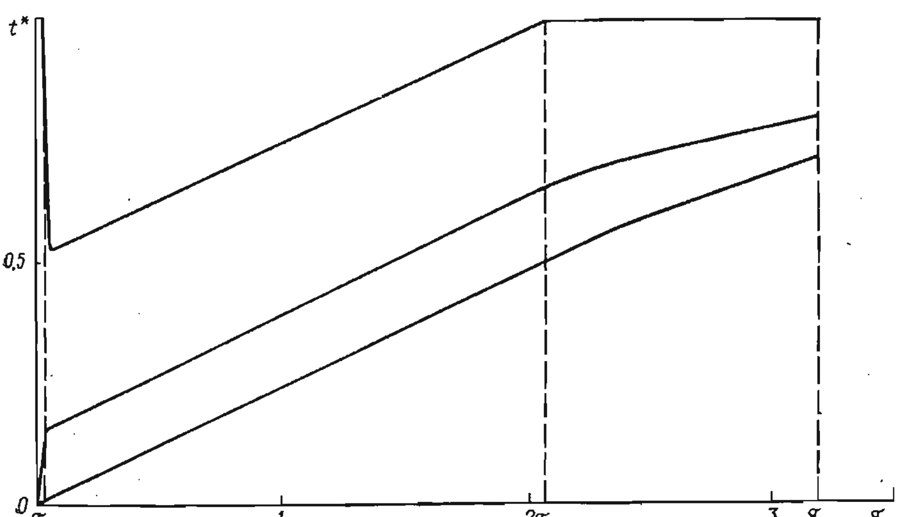

Рис. 4

и третьем этапах нагрева управление равно предельно возможному, а на втором — обеспечивает предельно допустимый перепад по толщине цилиндрической стенки.

1. *Вигак В. М., Фальковский С. В., Горешник А. Д., Мащенко Б. В.* Допустимые температурные напряжения и скорости нагрева (расхолаживания) толстостенных паропроводов.— М. : Энергия, 1975.— 104 с.
2. *Дуэль М. А., Горелик А. Х., Марьенко А. Ф.* Автоматическое управление энергоустановками в пусковых режимах.— Киев : Техніка, 1974.— 151. с.
3. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла.— М. : Наука, 1964.— 464 с.
4. *Тайц Н. Ю.* Технология нагрева стали.— М. : Металлургиздат, 1962.— 567 с.

Вычислительный центр Института прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 16.02.79

УДК 512.8

В. М. Петричкович

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ

В работе [8] исследованы условия, при которых матричное уравнение

$$A_0X^m + A_1X^{m-1} + \cdots + A_m = 0, \tag{1}$$

где $A_0, A_1, ..., A_m$ — $n \times n$-матрицы над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, имеет бесконечное число решений. Случаи конечного числа решений уравнения (1) рассмотрены в работах [1, 3, 5]. В частности, известно, что если характеристические корни λ-матрицы

$$M(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_m, \quad |A_0| \neq 0, \tag{2}$$

различны, то число решений k уравнения (1) конечно [5]. В этой статье показано, что $m^n \leqslant k \leqslant \binom{mn}{n}$. Для квадратного матричного уравнения ($m = 2$) этот результат получен автором в работе [7].

Сформулируем предварительные утверждения.

Лемма 1. Пусть $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_l)$ $(l \geqslant n)$ — наборы линейно независимых векторов. Тогда среди наборов $(a_1, \ldots, a_r, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}, a_{r+q+1}, \ldots, a_n)$, где $i_1, \ldots, i_q$ пробегают $1, \ldots, n$ имеется по крайней мере один набор, состоящий из линейно независимых векторов.

Доказательство легко проводится от противного.

Лемма 2. Пусть $(a_1, \ldots, a_n), \underbrace{(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), \ldots, (g_1, \ldots, g_n)}_{p}$ — наборы линейно независимых векторов. Тогда среди наборов $(a_1, \ldots, a_r, x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}, a_{r+q+1}, \ldots, a_n)$, где $x_{i_1}, \ldots, x_{i_q}$ — всевозможные $b_j, c_j, \ldots, q_j$, $j = 1, \ldots, n$, имеется $k \geqslant p^q$ наборов, состоящих из линейно независимых векторов.

Доказательство проводим методом индукции.

Для $p = 1$ лемма 2 вытекает из леммы 1. Предположим ее справедливость для $p - 1$. В силу леммы 1 существует набор $(a_1, ..., a_r, b_{i_1}, ..., b_{i_q}, a_{r+q+1}, ..., a_n)$ линейно независимых векторов. Теперь рассмотрим следующие наборы векторов:

$$(a_1, \ldots, a_r, b_{i_1}, \ldots, b_{i_q}, a_{r+q+1}, \ldots, a_n), \underbrace{(c_1, \ldots, c_n), \ldots, (g_1, \ldots, g_n)}_{p-1}.$$

Согласно предположению индукции среди наборов векторов вида

$$(a_1, \ldots, a_r, b_{u_1}, \ldots, b_{u_s}, y_{l_1}, \ldots, y_{l_t}, b_{u_{s+t+1}}, \ldots, b_{u_q}, a_{r+q+1}, \ldots, a_n),$$