продолжительности зондирующего импульса $0 < t_0 < 2\varkappa_2$, кривая 2 — $2\varkappa_2 \leqslant t_0 < 4\varkappa_2$. Результаты численных расчетов показали, что в формуле (17) с достаточной для практики точностью можно ограничиться тремя членами ряда.

1. *Исакович М. А.* Общая акустика.— М. : Наука, 1973.— 430 с.
2. *Підстригач Я. С.* Про один випадок ускладнення граничних умов в задачах гідропружності.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 3, с. 235—238.
3. *Селезов И. Т., Яковлев В. В.* Дифракция волн на симметричных неоднородностях.— Киев : Наук. думка, 1978.— 146 с.
4. *Термоупругость* электропроводных тел / Я. С. Подстригач, Я. И. Бурак, А. Р. Гачкевич, Л. В. Чернявская.— Киев : Наук. думка, 1977.— 247 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.12.78

УДК 533.6.013.42

А. П. Поддубняк

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКОГО ЗВУКОВОГО ИМПУЛЬСА НА ДВУХСЛОЙНОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ СФЕРЕ

Пусть на двухслойную акустическую сферу, находящуюся в акустической среде, набегает плоский звуковой импульс давления

$$p_i(r,\ \theta,\ \tau) = p_0 f(\tau'), \quad \tau' = \tau + r\cos\theta, \quad f(\tau') \equiv 0 \quad (\tau' \leqslant 0). \tag{1}$$

Здесь и далее p_0 — постоянная, имеющая размерность давления; r, θ — сферические координаты с началом отсчета в центре сферы; $f(\tau')$ — заполнение импульса; $\tau = ct/a$; t — время; a, b — радиусы сферы; $\varepsilon = a/b < 1$; c, c_1, c_2 — скорости звука; ρ, ρ_1, ρ_2 — плотности в окружающей среде, оболочке и заполнителе соответственно. Все линейные величины системы отнесены к внешнему радиусу оболочки a.

Для определения переизлученного сигнала необходимо решить дифференциальные уравнения движения акустических сред с учетом условий гидроакустического контакта [1], принципа причинности [3] и ограниченности искомых функций.

С помощью интегрального преобразования Фурье по τ и метода разделения переменных точное решение задачи — давление в эхо-сигнале — находим в виде интеграла свертки

$$p_e(r,\ \theta,\ \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - \xi)\,\mathcal{P}_e(r,\ \theta,\ \xi)\,d\xi, \tag{2}$$

где

$$\mathcal{P}_e(r,\ \theta,\ \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{P}}_e(r,\ \theta,\ \omega)\,e^{-i\omega\tau}d\omega; \tag{3}$$

$$\overline{\mathcal{P}}_e(r,\ \theta,\ \omega) = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1)\,a_n(\omega)\,h_n^{(1)}(\omega r)\,P_n(\cos\theta); \tag{4}$$

$$a_n(\omega) = \frac{1}{2}(1 + y^{-1}F_n), \quad F_n = \frac{z^2 - q}{z^1 - q}, \quad q = \frac{D_{10}}{D_{20}},$$

$$D_{10} = \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}, \quad D_{20} = \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

$$A_{12} = -j_n(\omega_1), \quad A_{13} = -n_n(\omega_1), \quad A_{22} = -N_1\omega_1 j_n'(\omega_1),$$

$$A_{23} = -N_1\omega_1 n_n'(\omega_1),\quad A_{32} = j_n(\omega_1\varepsilon),\quad A_{33} = n_n(\omega_1\varepsilon),$$
$$A_{34} = -j_n(\omega_2\varepsilon),\quad A_{42} = (\omega_1\varepsilon)\, j_n'(\omega_1\varepsilon),$$
$$A_{43} = (\omega_1\varepsilon)\, n_n'(\omega_1\varepsilon),\quad A_{44} = -N_2(\omega_2\varepsilon)\, j_n'(\omega_2\varepsilon),$$
$$z^j = \omega h_n^{(j)\prime}(\omega)/h_n^{(j)}(\omega),\quad y = h_n^{(1)}(\omega)/h_n^{(2)}(\omega),\quad \omega_j = \omega/\beta_j,$$
$$\beta_j = c_j/c,\quad j = 1,\ 2,\quad N_1 = \rho/\rho_1,\quad N_2 = \rho_1/\rho_2;$$

$j_n(x)$, $n_n(x)$, $h_n^{(j)}(x)$ — сферические функции Бесселя; $P_n(x)$ — полином Лежандра.

Ряд (4), представляющий собой с точностью до $e^{-i\omega\tau}$ давление в стационарной переизлученной волне, разложенное по нормальным модам, с помощью преобразования Зоммерфельда — Ватсона [4] можно преобразовать в контурный интеграл по комплексной переменной $\alpha = n$. Часть этого интеграла с контуром интегрирования, охватывающим полюсы функции $F(\alpha) = F_n$ при $\operatorname{Im}\alpha \geqslant 0$, позволяет выделить вклады, соответствующие поверхностным волнам [7]. Исследование поверхностных волн будет проведено в последующей статье. Здесь мы займемся вычислением другой части интеграла с контуром C_s вдали от указанных полюсов, что соответствует рассмотрению волн отражения и прохождения [5—7]. Этот интеграл имеет вид

$$(\overline{\mathcal{P}}_e)_g = \overline{\mathcal{P}}_g = p_0 \int\limits_{C_s} e^{-i\pi\alpha/2}(2\alpha+1)\, a_\alpha(\omega)\, h_\alpha^{(1)}(\omega r)\, Q_\alpha^{(2)}(\theta)\, d\alpha, \tag{6}$$

где

$$Q_\alpha^{(2)}(\theta) = \frac{1}{2}\left[P_\alpha(\cos\theta) - \frac{2i}{\pi} Q_\alpha(\cos\theta)\right];$$

$P_\alpha(x)$, $Q_\alpha(x)$ — сферические функции Лежандра.

Введем функции

$$\left.\begin{aligned} y_j &= \frac{h_\alpha^{(1)}(\omega_j)}{h_\alpha^{(2)}(\omega_j)},\quad \bar{y}_j = \frac{h_\alpha^{(1)}(\omega_j\varepsilon)}{h_\alpha^{(2)}(\omega_j\varepsilon)},\quad j = 1,\ 2,\\ z_j^k &= \omega_j \frac{h_\alpha^{(k)\prime}(\omega_j)}{h_\alpha^{(k)}(\omega_j)},\quad \bar{z}_j^k = (\omega_j\varepsilon)\frac{h_\alpha^{(k)\prime}(\omega_j\varepsilon)}{h_\alpha^{(k)}(\omega_j\varepsilon)}\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

и преобразуем $F(\alpha)$ к виду [5, 6]

$$F(\alpha) = R_{12} - T_{12}T_{21}\sum_{m=1}^{\infty} R_{21}^{m-1} S_{12}^m y_1^m, \tag{8}$$

где

$$S_{12} = -(1/\bar{y}_1)\left[\bar{R}_{12} - \bar{T}_{12}\bar{T}_{21}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{R}_{21}^{m-1}\bar{y}_2^m\right]; \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} R_{12} &= (z^2 - N_1 z_1^2)/U,\quad R_{21} = -(z^1 - N_1 z_1^1)/U,\\ T_{12} &= (z^1 - z^2)/U,\quad T_{21} = N_1(z_1^1 - z_1^2)/U,\\ \bar{R}_{12} &= (\bar{z}_1^2 - \bar{N}_2\bar{z}_2^2)/\bar{U}_1,\quad \bar{R}_{21} = -(\bar{z}_1^1 - N_2\bar{z}_2^1)/\bar{U}_1,\\ \bar{T}_{12} &= (\bar{z}_1^1 - \bar{z}_1^2)/\bar{U}_1,\quad \bar{T}_{21} = N_2(\bar{z}_2^1 - \bar{z}_2^2)/\bar{U}_1,\\ U &= z^1 - N_1 z^2,\quad \bar{U}_1 = \bar{z}_1^1 - N_2\bar{z}_2^2.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Здесь R_{12}, R_{21} — коэффициенты отражения, а T_{12}, T_{21} — коэффициенты прохождения на внешней границе раздела сред [5, 6]; $\bar{R}_{12}$, $\bar{R}_{21}$ и $\bar{T}_{12}$, $\bar{T}_{21}$ — соответственно коэффициенты отражения и прохождения на поверхности заполнителя.

Отметим, что на основании формул (8), (9) методом математической индукции легко привести вид функции $F(\alpha)$ для случая многослойной акустической сферы.

Если воспользоваться при $|\omega| \gg 1$, $|\alpha| \gg 1$ $[|\omega - \alpha| = O(\omega^{-1/3})]$ асимптотическими разложениями Дебая для сферических функций Бесселя [4, 6] и соответствующей асимптотической формулой для функций $Q_\alpha^{(2)}(\theta)$ [4], то после преобразований интеграл (6) можно вычислить по методу перевала [2]. В результате получим

$$\overline{\mathcal{P}}_g = \overline{\mathcal{P}}_{000}(r,\ \theta,\ \omega) - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=l \\ m\neq 0}}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} K_{mlk} \overline{\mathcal{P}}_{mlk}(r,\ \theta,\ \omega), \tag{11}$$

где

$$\overline{\mathcal{P}}_{mlk} = G_{mlk} e^{i\omega\tau_{mlk}}; \quad l,\ k = \overline{0,\ \infty}; \quad m = \overline{l,\ \infty};$$

$$G_{000} = S_0 R_{12}/F_{000}; \quad G_{mlk} = S_0 T_{12} T_{21} R_{21}^{m-1} \overline{R}_{12}^{m-l} \times$$

$$\times (\overline{T}_{12}\overline{T}_{21})^l \overline{R}_{21}^k / F_{mlk} \quad (m \neq 0); \quad K_{mlk} = \frac{i^{k+l} m!\,(l+k-1)!}{(m-l)!\,l!\,(l-1)!\,k!}; \tag{12}$$

$$F_{mlk} = \left| 2r\cos\varkappa \left[1 - \cos\gamma \left(\frac{m\beta_1}{\cos\delta} - \frac{m\beta_1}{\varepsilon\cos\eta} + \frac{(k+l)\,\beta_2}{\varepsilon\cos\xi}\right)\right] - \cos\gamma \right|^{1/2};$$

$$\tau_{mlk} = r\cos\varkappa - 2\cos\gamma + \frac{2m}{\beta_1}(\cos\delta - \varepsilon\cos\eta) + \frac{2(k+l)}{\beta_2}\varepsilon\cos\xi;$$

$$S_0 = p_0 \sqrt{\frac{\sin 2\gamma}{2r\sin\theta}}.$$

При этом $\sin\gamma = N = N_{mlk} = \dfrac{\nu}{\omega}$ $\left(\nu = \alpha + \dfrac{1}{2}\right)$ — решение уравнения седловой точки

$$\theta_{mlk} = (k+l)(\pi - 2\xi) - \varkappa + 2\gamma + 2m(\eta - \delta), \tag{13}$$

где

$$\sin\gamma = r\sin\varkappa = \beta_1^{-1}\sin\delta = \varepsilon\beta_1^{-1}\sin\eta = \varepsilon\beta_2^{-1}\sin\xi, \tag{14}$$

а $\theta_{mlk} = \theta$ — полярный угол точки наблюдения во внешней среде, в которую поступают рассеянные волны.

Подставив выражение (11) в формулы (3) и (2), найдем давление в переизлученном импульсе:

$$(p_e)_g \approx p_{000}(r,\ \theta,\ \tau) - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\substack{m=l \\ m\neq 0}}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} K_{mlk} p_{mlk}(r,\ \theta,\ \tau), \tag{15}$$

$$p_{mlk}(r,\ \theta,\ \tau) = G_{mlk} f(\tau - \tau_{mlk}).$$

Из анализа уравнения седловой точки (13) и формул (11), (12), (15) следует, что первый компонент в (15) соответствует импульсу, отраженному от внешней поверхности объекта. Последующие составляющие отвечают импульсам прохождения. При этом число $m - 1$ ($m = 1, 2, \ldots$) равно количеству отражений преломленной волны от внешней поверхности внутри объекта, число l ($l = 1, 2, \ldots$) равно числу преломлений в заполнитель, а число $k - 1$ ($k = 1, 2, \ldots$) — количеству внутренних отражений волн, проникших в заполнитель. На рис. 1 изображен ход лучей отраженных и преломленных волн (mlk) в начальный период их распространения. Отсюда, в частности, следует, что волны, отраженные внутрь оболочки и заполнителя образуют каустики — сферические поверхности радиусов $r_1 = \beta_1 \sin\gamma$ (в оболочке) и $r_2 = \beta_2 \sin\gamma$ (в заполнителе).

Сравнение нестационарных импульсов посылки (1) и приема (2) показывает, что отраженные и преломленные волны сохраняют вид набегающей волны. Однако это имеет место лишь вблизи их фронтов, так как результаты, представленные формулой (11), получены при $|\omega| \gg 1$ с помощью главных членов в асимптотических разложениях Дебая, в $Q_\alpha^{(2)}(\theta)$ и в методе перевала.

Удержание высших членов асимптотик приводит к искажению сигналов в процессе их распространения [6, 8]. Из геометрической картины и формул (11), (12), (15) следует, что величины τ_{mlk} определяют безразмерное время распространения импульсов при отражении или преломлении их на объекте

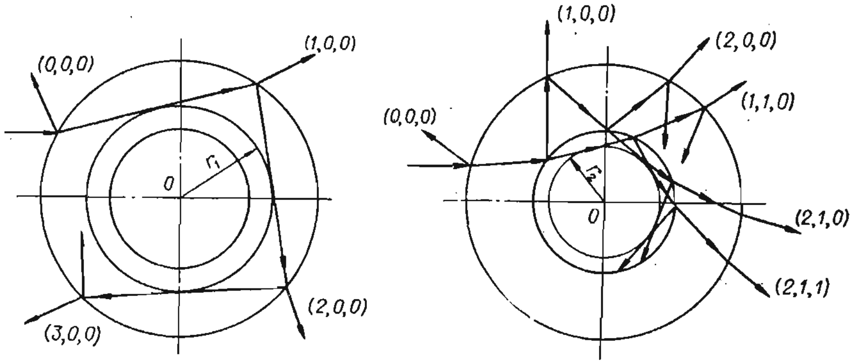

Рис. 1

и поступлении в точку наблюдения. Уравнение седловой точки (13) и равенства

$$\tau = \tau_{mlk} \quad (l,\ k = \overline{0,\ \infty}; \quad m = \overline{l,\ \infty}) \tag{16}$$

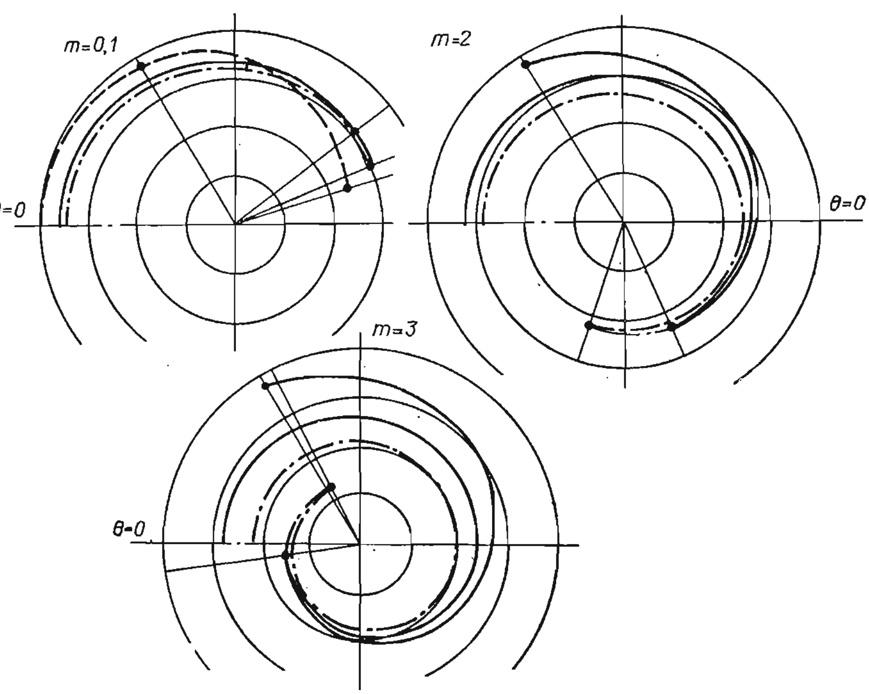

Рис. 2

при фиксированном $\tau = \tau_0$ позволяют определить положение фронта каждого импульса в отдельности, т. е. зависимость r от θ. В частности, при $r \gg 1$ из формул (12) имеем $\varkappa \approx 0$ и

$$r_{mlk}(\theta) \approx \tau_0 + 2\cos\gamma - \frac{2m}{\beta_1}(\cos\delta - \varepsilon\cos\eta) - \frac{2(k+l)}{\beta_2}\varepsilon\cos\xi. \tag{17}$$

При этом уравнение седловой точки принимает вид

$$\theta_{mlk} \approx (k+l)(\pi - 2\xi) + 2\gamma - 2m(\delta - \eta).$$

На рис. 2 изображены фронты волн при $\tau_0 = 2$ для случая сферической оболочки из воды ($c_1 = 1493$ м/с, $\rho_1 = 1$ г/см³) с акустически жестким или мягким заполнителем, находящейся в воздухе ($c = 330$ м/с, $\rho = 0{,}00129$ г/см³). Штриховой линией показан фронт прямо отраженной волны ($m = 0$), сплошной — фронт волн прохождения ($m = 1, 2, 3$) при $\varepsilon = 0{,}4$ и штрихпунктирной — фронт этих волн при $\varepsilon = 0{,}6$.

Для определения седловых точек можно использовать численные методы или графический способ, предложенный в работах [5, 6]. Здесь приведем еще одно графическое решение, более удобное с точки зрения понимания качественной картины волнового поля. Введем полярные координаты $M = \exp(N)$ и θ. Пусть для определенности $c < c_1 < c_2$ ($\beta_2 > \beta_1 > 1$). Тогда среди углов γ, $\varkappa$, δ, η, ξ существуют угол тени для внешней поверхности ($N^1 = 1$), критический угол преломления в оболочку ($N^2 = \beta_1^{-1}$), угол тени для заполнителя ($N^3 = \varepsilon/\beta_1$) и критический угол волн преломления в заполнитель ($N^4 = \varepsilon/\beta_2$). На рис. 3 отложены концентрические окружности при этих значениях N и $N^5 = 0$. Кривые изображают график уравнения седловой точки (13) для волны отражения и первой волны прохождения (ход лучей изображен на рис. 3, *б*). Кривая *ADE* изображает график этого уравнения для прямо отраженной волны ($m = l = k = 0$). Кривая *CD* соответствует волне, проникающей внутрь оболочки и не касающейся поверхности ядра ($m = 1$), кривая *AC* характеризует волну, прямо отраженную от внутренней поверхности оболочки ($m = 1$), а кривая *AB* — волну, преломленную в заполнителе ($l = 1$, $k = 0$). Нетрудно построить аналогичные графики и для многократно преломленных и отраженных волн прохождения. Кривые зависимости седловых точек от θ будут соответствующим образом «наматываться» вокруг окружности $M = 1$. Решения уравнения (15) находим посредством определения координат точек пересечения окружностей $M = \mathrm{const}$ с указанными кривыми.

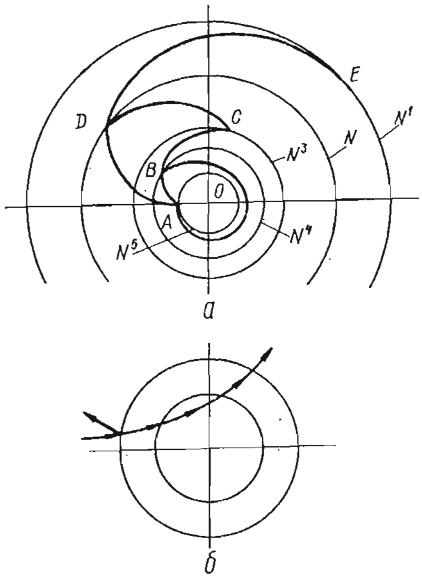

Рис. 3

Имея седловые точки, находим функции G_{mlk} и τ_{mlk}, а при заданной модуляции $f(\tau)$ импульса посылки — и форму переизлученных сигналов.

1. *Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э.* Эхо-сигналы от упругих объектов.— Таллин : Изд-во АН ЭССР.— Т. 2.— 346 с.
2. *Федорюк М. В.* Метод перевала.— М. : Наука, 1977.— 368 с.
3. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн.— М. : Мир, 1978.— Т. 1.— 552 с.
4. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции.— М. : Мир, 1964.— 428 с.
5. *Brill D., Überall H.* Transmitted waves in the diffraction of sound from liquid cylinders.— J. Acoust. Soc. Amer., 1970, **47**, N 5, part 2, p. 1467—1469.
6. *Brill D., Überall H.* Acoustic waves transmitted through solid elastic cylinders.— J. Acoust. Soc. Amer., 1971, 50 N 3, part 2, p. 921—939.
7. *Doolittle R. D., Überall H., Ugincius P.* Sound scattering by elastic cylinders.— J. Acoust. Soc. Amer., 1968, **43**, N 1, p. 1—14.
8. *Rudgers A. J., Überall H.* Pulses specular reflected by a soft cylinder.— J. Acoust. Soc. Amer., 1970, **48**, N 1, part 2, p. 371—381.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
21.06.78