$$\times \exp\left(-\int_0^y \frac{\gamma(y)+\mu_k}{\alpha(y)}\,dy\right), \tag{21}$$

$$\mu_k = 2k\pi i + \int_0^{2\pi} \frac{c(s)}{a(s)}\,ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В формуле (21) постоянные $Y_k(0)$ такие:

$$Y_k(0) = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x)\,dx}{X_k(x)\,a(x)}.$$

На этом фактическое построение функции $u(x, y)$ можно считать законченным.

Обоснование предложенного метода не требует никаких новых идей по сравнению с обоснованием обычного метода Фурье (см., например, [2]) и даже несколько проще.

На основании изложенного можно сделать такие выводы.

1. Существует ограниченный класс задач, для решения которых целесообразно использовать изложенный метод. Сюда, в частности, входят некоторые задачи, к которым обычный метод разделения переменных неприменим.

2. Преимуществом предлагаемого метода является то, что определение собственных значений и собственных функций не составляет проблемы.

3. Другое преимущество — даже для уравнений с переменными коэффициентами аппаратом решения служат обычные, а не обобщенные ряды или интегралы Фурье. Обычный ряд и интеграл Фурье обладают некоторыми замечательными свойствами, которые не всегда сохраняются у обобщенных рядов или интегралов. Здесь прежде всего имеются в виду свойства аналитической продолжимости, которые позволяют приводить смешанные задачи математической физики к краевым задачам теории аналитических функций.

Информация о других методах решения задач для уравнений с неразделяющимися переменными имеется в работе [1].

1. *Каленюк П. І., Скоробогатько В. Я.* Якісні методи теорії диференціальних рівнянь.— К. : Наук. думка, 1977.— 123 с.
2. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М. : Физматгиз, 1961.— 400 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.03.79

УДК 512.8

В. Р. Зелиско

О СТРОЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТИМЫХ МАТРИЦ

Рассмотрим неособенную полиномиальную $n \times n$-матрицу $A(x)$ с элементами из $\mathbb{C}[x]$. Для нее существуют классы обратимых над $\mathbb{C}[x]$ матриц $\{P(x)\}$ и $\{Q(x)\}$ такие, что для каждых матриц $P(x) \in \{P(x)\}$ существуют $Q(x) \in \{Q(x)\}$, что

$$P(x)\,A(x)\,Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)), \tag{1}$$

где $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Матрицу $\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ называют формой Смита полиномиальной матрицы $A(x)$.

Запишем $A(x)$ в виде матричного многочлена

$$A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \cdots + A_s. \tag{2}$$

Пусть форма Смита матрицы $A(x)$ представляется в виде

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n), \tag{3}$$

где $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ и степень многочлена $\varphi = \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ равна nr, $r < s$. Справедлива такая теорема [1].

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием того, чтобы $A(x) = B(x) C(x)$, где $B(x)$ — регулярный матричный многочлен степени r с формой Смита $\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, а $C(x)$ имеет ту же форму Смита, что и матрица $\operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, является существование матрицы $P_0(x) \in \{P(x)\}$ такой, что

$$\operatorname{rang} M_{N_{r-1}(x)}(\varphi) = nr, \tag{4}$$

где $N_{r-1}(x) = [\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]_* P_0(x) \| E, Ex, \ldots, Ex^{r-1} \|$ [2].

Цель этой работы — указать метод построения матрицы $P_0(x)$ из теоремы 1. Выясним сначала, как связаны между собой различные матрицы из $\{P(x)\}$. Пусть наряду с равенством (1) выполняется соотношение

$$P_1(x) A(x) Q_1(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n). \tag{5}$$

Очевидно, что существуют обратимые матрицы $H(x)$ и $Q_2(x)$, что

$$P(x) = H(x) P_1(x), \quad Q(x) = Q_1(x) Q_2(x). \tag{6}$$

Из соотношений (1) и (6) получаем

$$H(x) P_1(x) A(x) Q_1(x) Q_2(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n),$$

или с учетом соотношения (5) находим

$$H(x) \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \overline{H}(x), \tag{7}$$

где $\overline{H}(x) = Q_2^{-1}(x)$.

Таким образом, произвольную матрицу из класса $\{P(x)\}$ можно получить путем умножения некоторой фиксированной матрицы из этого класса слева на обратимую матрицу $H(x)$, удовлетворяющую соотношению (7). Нетрудно проверить, что если $P_1(x)$ — матрица из соотношения (5), а $H(x)$ — из (7), то матрица $P(x) = H(x) P_1(x)$ удовлетворяет равенству (1).

Пусть $\overline{H}(x) = \| h_{ij} \|_1^n$, где $h_{ij}(x) \in \mathbb{C}[x]$. Тогда из равенства (7) получаем

$$H(x) = \left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} & \ldots & h_{1n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_{21} & h_{22} & \ldots & h_{2n-1} & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} h_{n1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} h_{n2} & \ldots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} h_{n,n-1} & h_{nn} \end{matrix} \right\|, \tag{8}$$

т. е. матрица $H(x)$, удовлетворяющая соотношению (7), имеет вид (8). Очевидно, что всякая матрица вида (8) удовлетворяет соотношению (7).

Покажем, что множество матриц вида (8) образует группу Γ_0, являющуюся, очевидно, подгруппой полной линейной группы $GL(n, \mathbb{C})$. Пусть $H \in \Gamma_0$ и $H_1 \in \Gamma_0$, где $H_1(x)$ — некоторая матрица, удовлетворяющая соотношению

$$H_1(x) \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \overline{H}_1(x). \tag{9}$$

Покажем, что $HH_1 \in \Gamma_0$. Действительно,

$$H(x) H_1(x) \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = H(x) \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \overline{H}_1(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \overline{H}(x) \overline{H}_1(x),$$

т. е. $HH_1 \in \Gamma_0$.

Из соотношения (7) получаем

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = H^{-1}(x)\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\overline{H}(x),$$

или

$$H^{-1}(x)\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\overline{H}^{-1}(x),$$

т. е. $H^{-1} \in \Gamma_0$.

Рассмотрим матрицу

$$G(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} g_{21} & 1 & \ldots & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} g_{n1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} g_{n2} & \ldots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} g_{n,n-1} & 1 \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

где $g_{ij} = t_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(1)} x + \cdots + t_{ij}^{(p_{ij})} x^{p_{ij}}$ $(i > j)$, т. е. g_{ij} — это многочлены по x, коэффициенты которых попарно различные независимые переменные. Степени p_{ij} этих многочленов определим позже.

Матрицы вида (10) удовлетворяют соотношению

$$G(x)\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\overline{G}(x), \tag{11}$$

где $\overline{G}(x)$ — нижняя унитреугольная матрица. Легко показать, что множество матриц вида (10) образует группу Γ_1 над кольцом

$\mathbb{C}(t_{21}^{(0)}, \ldots, t_{n,n-1}^{(p_{n,n-1})})[x]$, где $t_{21}^{(0)}, \ldots, t_{n,n-1}^{(p_{n,n-1})}$ — множество попарно различных независимых переменных, являющихся коэффициентами многочленов g_{ij}.

Рассмотрим произведение $F(x) = H(x)G(x)$, где $H(x)$ и $G(x)$ — матрицы вида (8) и (10):

$$F(x) = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & \ldots & f_{1n-1} & f_{1n} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} f_{21} & f_{22} & \ldots & f_{2n-} & f_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} f_{n1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} f_{n2} & \ldots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} f_{n,n-1} & f_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{12}$$

Множество матриц вида (12), где $f_{ij} \in \mathbb{C}(t_{21}^{(0)}, \ldots, t_{n,n-1}^{(p_{n,n-1})})[x]$, образует группу Γ. Проверяется это, как и раньше, исходя из того, что матрицы вида (12) удовлетворяют соотношению

$$F(x)\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\overline{F}(x), \tag{13}$$

где $\overline{F}(x)$ — некоторая обратимая над $\mathbb{C}(t_{21}^{(0)}, \ldots, t_{n,n-1}^{(p_{n,n-1})})[x]$ матрица. Очевидно, что $\Gamma_0 \subset \Gamma$, $\Gamma_1 \subset \Gamma$.

Докажем некоторые свойства матриц из групп Γ_0, Γ_1 и Γ.

Угловыми подматрицами матрицы $F(x)$ будем называть матрицы $F_k(x)$, образованные первыми k строками и первыми k столбцами матрицы $F(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Определители угловых подматриц будем называть угловыми минорами матрицы $F(x)$.

Предложение 1. Матрицы $F_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ обратимы над $\mathbb{C}(t_{21}^{(0)}, \ldots, t_{n,n-1}^{(p_{n,n-1})})[x]$.

Доказательство. Из соотношения (13) следует, что

$$F_k(x)\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)\overline{F}_k(x).$$

Таким образом, угловые миноры матриц $F(x)$ и $\overline{F}(x)$ одновременно равны нулю или отличны от нуля. Поэтому для доказательства предложения достаточно показать, что матрицы $\overline{F}_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ обратимы.

Умножим обе части равенства (11) слева на $H(x)$. Учитывая соотношения (9) и (13), получаем

$$\overline{F}(x) = \overline{H}(x)\,\overline{G}(x). \tag{14}$$

Согласно равенству (14) запишем угловую подматрицу $\overline{F}_k$ в виде

$$\overline{F}_k(x) = \overline{H}_{kn}(x)\,\overline{G}_{nk}(x),$$

где

$$\overline{H}_{kn} = \left\| \begin{matrix} h_{11} & \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} h_{12} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{k1} & h_{k2} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_k} h_{kn} \end{matrix} \right\|, \quad \overline{G}_{nk} = \left\| \begin{matrix} 1 & & \\ g_{21} & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{k1} & g_{k2} \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} \dots & g_{nk} \end{matrix} \right\|.$$

Допустим, что при некотором $\alpha \in \mathbb{C}$ $\det \overline{F}_k(\alpha) = 0$. Согласно формуле Бине — Коши получим, что сумма произведений всевозможных миноров k-го порядка матриц $\overline{H}_{kn}(\alpha)$ и $\overline{G}_{nk}(\alpha)$ равна нулю.

Рассмотрим матрицу $\overline{G}_{nk}(\alpha)$. Ее элементы $g_{ij}(\alpha)$ $(i > j)$ — линейные формы от попарно различных независимых переменных, которые можно считать новыми независимыми переменными. Индукцией по k легко показать, что все миноры k-го порядка матрицы $\overline{G}_{nk}(\alpha)$ отличны от нуля и попарно различны.

Миноры k-го порядка матрицы $\overline{H}_{kn}(\alpha)$ не все равны нулю, поскольку это противоречило бы обратимости матрицы $\overline{H}(x)$.

Таким образом, получаем, что независимые переменные $t_{ij}^{(l)}$, являющиеся коэффициентами полиномов g_{ij} из матрицы $\overline{G}_{nk}$, удовлетворяют некоторому уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}$, что противоречит алгебраической независимости этих переменных. Полученное противоречие доказывает предложение 1.

Замечание. При $k = 1$ получаем, что многочлен f_{11} не имеет в $\mathbb{C}$ ни одного корня.

Предложение 2. Существует матрица $S(x) \in \Gamma_1$ такая, что

$$S(x)\,F(x) = F_\varphi(x), \tag{15}$$

где

$$F_\varphi(x) = \left\| \begin{matrix} f_{11} & f_{12} & \dots\ f_{1n} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \bar{f}_{21} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} & \bar{f}_{22} & \dots\ \bar{f}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \bar{f}_{n1} \frac{\varphi_n}{\varphi_1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} \bar{f}_{n2} \frac{\varphi_n}{\varphi_2} & \dots\ \bar{f}_{nn} \end{matrix} \right\|;$$

$F(x)$ — произвольная матрица вида (12), а $\bar{f}_{ij}$ — некоторые многочлены с коэффициентами из $\mathbb{C}(t_{21}^{(0)}, \dots, t_{n,n-1}^{(\varphi_{n,n-1})})$.

Доказательство. Построим матрицу $S(x)$ индукцией по n.

1. $n = 2$. Поскольку согласно сделанному выше замечанию f_{11} не имеет в $\mathbb{C}$ ни одного корня, то он взаимно прост с $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$, т. е. $f_{11} m + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} q = 1$. Отсюда получаем равенство

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} f_{21} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} m f_{21} f_{11} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} f_{21} q \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Обозначив $s_{21} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} m f_{21}$, $\bar{f}_{21} = f_{21} q$, получим

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ s_{21} & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} f_{11} & f_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} f_{21} & f_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} f_{11} & f_{12} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \bar{f}_{21} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} & \bar{f}_{22} \end{matrix} \right\|,$$

т. е. для $n = 2$ выполняется равенство (15).

2. Пусть существует нижняя унитреугольная матрица S_{n-1} порядка $n - 1$ такая, что

$$S_{n-1} F_{n-1} = \left\| \begin{matrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n-1} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \bar{f}_{21} \frac{\varphi_2}{\varphi_1} & \bar{f}_{22} & \dots & f_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_1} \bar{f}_{n-1,1} \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_1} & \frac{\varepsilon_{n-1}}{\varepsilon_2} \bar{f}_{n-1,2} \frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_2} & \dots & f_{n-1,n-1} \end{matrix} \right\|. \quad (16)$$

3. Докажем справедливость предложения для $k = n$. Поскольку F_{n-1} обратима, то обратимой будет и матрица, стоящая в правой части равенства (16). Обозначим ее $F_{n-1,\varphi}$. Рассмотрим строку f длины $n - 1$ вида

$$\left\| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \left(\bar{f}_{n1} \frac{\varphi_n}{\varphi_1} - f_{n1} \right), \ \dots, \ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \left(\bar{f}_{n,n-1} \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} - f_{n,n-1} \right) \right\|,$$

где $f_{n1}, \dots, f_{nn}$ — многочлены из последней строки матрицы $F(x)$, а $\bar{f}_{n1}, \dots, \bar{f}_{n,n-1}$ — произвольные многочлены из $\mathbb{C}(t_{21}^{(0)}, \dots, t_{n,n-1}^{(p_{n,n-1})}) |x|$.

Уравнение

$$\| x_1, \dots, x_n \| F_{n-1} = f \quad (17)$$

имеет единственное решение, поскольку F_{n-1} обратима. Обозначим его $\| s_{n1}, \dots, s_{n,n-1} \|$. Таким образом,

$$\| s_{n1}, \dots, s_{n,n-1} \| F_{n-1} = f,$$

откуда получаем

$$\| s_{n1}, \dots, s_{n,n-1} \| \left\| \begin{matrix} & F_{n-1} & \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} f_{n1} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} f_{n,n-1} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \bar{f}_{n1} \frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \ \dots, \ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \bar{f}_{n,n-1} \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} \right\|. \quad (18)$$

Матрицу $F(x)$ согласно предложению 1 можно представить в виде

$$F(x) = \left\| \begin{matrix} & F_{n-1} & & f_{1n} \\ & & & \vdots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} f_{n1} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} f_{n,n-1} & f_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

где F_{n-1} — обратимая матрица порядка $n - 1$ вида (12), для которой справедливо предположение индукции. Построим матрицу $S(x)$:

$$S(x) = \left\| \begin{matrix} & & & 0 \\ & S_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ s_{n1} & \dots & s_{n,n-1} & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где $\| s_{n1}, \dots, s_{n,n-1} \|$ — полученное выше решение уравнения (17). Учитывая равенство (18), получаем

$$S(x) F(x) = \left\| \begin{matrix} & & & f_{1n} \\ & F_{n-1,\varphi} & & \vdots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} \bar{f}_{n1} \frac{\varphi_n}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}} \bar{f}_{n,n-1} \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} & \bar{f}_{nn} \end{matrix} \right\|,$$

т. е. получаем равенство (15). $S(x) \in \Gamma_1$, поскольку $F(x) \in \Gamma$, $F_\varphi \in \Gamma$ и матрица $S(x)$ — нижняя унитреугольная.

Предложение 3. Существует обратимая матрица $R(x)$ такая, что

$$F(x)\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)R(x) = D(x)\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n), \tag{19}$$

где $F(x)$ — матрица вида (12), а $D(x) \in \Gamma_1$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что

$$F_\varphi \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)V(x),$$

где F_φ — матрица из соотношения (15), а $V(x)$ — некоторая обратимая матрица. Отсюда, учитывая предложение 2, получаем равенство (19), где $D(x) = S^{-1}(x)$, а $R(x) = V^{-1}(x)$.

Предложение 4. Пусть $G(x) \in \Gamma_1$, $G_1(x) \in \Gamma_1$, $P_1(x)$, $P_2(x) \in \{P(x)\}$. Тогда

$$\operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_1(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi) =$$
$$= \operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G_1(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi). \tag{20}$$

Доказательство. $P_1(x) = H(x)P_2(x)$, где $H(x) \in \Gamma_0$. Таким образом,

$$[\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]_* G(x)P_1(x) = [\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]_* G(x)H(x)P_2(x).$$

Поскольку $G(x) = (G^{-1}(x))_*$, $H(x) = (H^{-1}(x))_* \det H(x)$, то

$$[\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]_* G(x)H(x) = [H^{-1}(x)G^{-1}(x)\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]_* \det H.$$

Учитывая, что $H^{-1}(x)G^{-1}(x) \in \Gamma$ и используя предложение 3, находим

$$H^{-1}(x)G^{-1}(x)\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = D(x)\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)R^{-1}(x).$$

Отсюда

$$[\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]_* G(x)H(x) = [R^{-1}(x)]_* [\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]_* D_*(x) \det H.$$

Поскольку матрица $[R^{-1}(x)]_*$ обратимая, то, принимая во внимание свойства матрицы $M_{N_{r-1}(x)}(\varphi)$ [2] и обозначая $G_1(x) = D_*(x)$, получаем:

$$\operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_1(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi) =$$
$$= \operatorname{rang} M_{[R^{-1}(x)]_*[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|\det H}(\varphi) =$$
$$= \operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G_1(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi),$$

что и доказывает предложение 4.

Предложение 5.

$$\operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_1(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi) =$$
$$= \operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi). \tag{21}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы

$$M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi) \tag{22}$$

и

$$M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G_1(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi). \tag{23}$$

Матрица $G(x)$ имеет вид (10). Поэтому элементами матрицы (22) являются полиномы от попарно различных независимых переменных $t_{21}^{(0)}, \ldots, t_{n,n-1}^{(p_{n,n-1})}$. Матрица $G_1(x)$ также имеет вид (10), но коэффициентами многочленов g_{ij} $(i > j)$ являются многочлены от $t_{21}^{(0)}, \ldots, t_{n,n-1}^{(p_{n,n-1})}$, которые обозначим через $u_{21}^{(0)}, \ldots, u_{n,n-1}^{(p_{n,n-1})}$. Однако нельзя утверждать, что $u_{21}^{(0)}, \ldots, u_{n,n-1}^{(p_{n,n-1})}$ будут алгебраически независимыми. Поэтому может случиться, что некоторым минорам матрицы (22), отличным от нуля, соответствуют нулевые миноры матрицы (23), и, следовательно,

$$\operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi) \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G_1(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi). \tag{24}$$

Из равенства (20) и неравенства (24) следует, что

$$\operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_1(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi) \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi). \tag{25}$$

Аналогично доказательству предложения 4 можно показать, что

$$\operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi) =$$

$$= \operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G_2(x)P_1(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi), \tag{26}$$

где $G_2(x) \in \Gamma_1$. Рассуждая, как и прежде, получаем

$$\operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_1(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi) \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G_2(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi).$$

Учитывая равенство (26), имеем

$$\operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_1(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi) \geqslant$$

$$\geqslant \operatorname{rang} M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P_2(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi). \tag{27}$$

Из неравенств (25) и (27) следует равенство (21), и предложение 5 доказано. Тем самым доказано, что ранг матрицы

$$M_{[\operatorname{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)]_* G(x)P(x)\|E,Ex,\ldots,Ex^{r-1}\|}(\varphi) \tag{28}$$

не зависит от выбора матрицы $P(x)$ в классе $\{P(x)\}$.

Рассмотрим матрицу

$$[\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)]_* G(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \frac{\varphi}{\varphi_1} & & & \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\varphi}{\varphi_2} g_{21} & \frac{\varphi}{\varphi_2} & . & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}\frac{\varphi}{\varphi_n} g_{n1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2}\frac{\varphi}{\varphi_n} g_{n2} & \cdots & \frac{\varphi}{\varphi_n} \end{matrix} \right\|. \tag{29}$$

Пусть $\psi_j \mid \psi_i$, т. е., $\psi_i = \chi_{ij}\psi_j$. Тогда

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_j}\frac{\varphi}{\varphi_i} g_{ij} = \frac{\varphi_i\psi_i}{\varphi_j\psi_j}\frac{\varphi}{\varphi_i} g_{ij} = \frac{\varphi}{\varphi_j}\chi_{ij}g_{ij}$$

и умножением матрицы (29) слева на нижнюю унитреугольную матрицу можно сделать элемент, стоящий в i-й строке и j-м столбце полученного произведения матриц, равным нулю.

Если же $\psi_j \nmid \psi_i$, то снова умножением матрицы (29) слева на нижнюю унитреугольную матрицу можно сделать так, чтобы $\deg\left(\frac{\varphi}{\varphi_i} g_{ij}\right) = \deg\frac{\varphi}{\varphi_j} - 1$. Отсюда $\deg g_{ij} = \deg\varphi_i - \deg\varphi_j - 1$.

Учитывая свойства матрицы (28) [2], можно считать, что матрица $G(x)$ имеет вид (10), где

$$g_{ij} = \begin{cases} t_{ij}^{(0)} + t_{ij}^{(1)}x + \cdots + t_{ij}^{(p_{ij})}x^{p_{ij}}, & p_{ij} = \deg\frac{\varphi_i}{\varphi_j} - 1, \quad \text{если } \psi_j \nmid \psi_i; \\ 0, \quad \text{если } \psi_j \mid \psi_i. \end{cases} \tag{30}$$

Вернемся теперь к сформулированной выше теореме 1. Матрица $P_0(x) \in \{P(x)\}$ представлялась в виде

$$P_0(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} v_{21} & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1} v_{n1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2} v_{n2} & \dots & 1 \end{Vmatrix} P(x),$$

где $v_{ij} \in \mathbb{C}[x]$, а $P(x)$ — некоторая матрица из $\{P(x)\}$. Условие (4), как нетрудно проверить, не нарушится, если возьмем матрицу $P_0(x)$ в виде $P_0(x) = G(x)P(x)$, где $G(x)$ имеет вид (10), (30), а $P(x)$ — некоторая матрица из $\{P(x)\}$. Согласно предложению 5 ранг матрицы (28) не зависит от выбора $P(x)$, что и доказывает такую теорему.

Теорема 2. Для того чтобы $A(x) = B(x)C(x)$, где $B(x)$ — регулярный матричный многочлен степени r с формой Смита $\mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, а $C(x)$ имеет ту же форму Смита, что и матрица $\mathrm{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathrm{rang}\, M_{N_{r-1}(x)}(\varphi) = nr,$$

где $N_{r-1}(x) = [\mathrm{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)]_* G(x)P(x) \| E, Ex, \dots, Ex^{r-1} \|$; $G(x)$ — матрица вида (10), (30), а $P(x)$ — произвольная матрица из класса $\{P(x)\}$.

Отметим, что множители $B(x)$ и $C(x)$ в условиях теоремы 2 зависят от конечного числа независимых переменных, являющихся коэффициентами многочленов g_{ij} в (30) (так называемое разложение матричного многочлена в произведение обобщенных множителей).

1. *Зелиско В. Р., Казимирский П. С.* К вопросу о разложении матричного многочлена на множители.— В кн.: 14-я Всесоюз. алгебраич. конф.: Тез. докл. Новосибирск, 1977, ч. 2, с. 30—31.
2. *Казімірський П. С.* Квазіунітальні і супровідні матриці матричних многочленів.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К.: Наук. думка, 1977, с. 29—52.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.12.78

УДК 539.376

И. К. Сенченков, В. Г. Карнаухов

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ В СВЯЗАННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

В статье [2] с использованием интеграла свертки сформулирован вариационный принцип связанной термовязкоупругости, характеризующий перемещение и поток энтропии. Установлено, что принцип является минимальным в области преобразованных по Лапласу переменных. Для доказательства минимальности принималось условие диссипативности [4], которое вообще не вытекает из термодинамики.

В настоящей работе минимальность указанного принципа доказывается на основе термодинамических неравенств и, кроме того, устанавливается минимальный принцип, характеризующий преобразованные напряжения и температуру. С использованием подхода, несколько отличного от [6], сформулированы соответствующие минимальные принципы в области физического времени.