12. *Wynn P.* Continued fractions whose coefficients obey a noncommutative law of multiplication.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1963, 12; N 4, p. 273—312.
13. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions.— New York, 1948.— 433 p.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
19.02.79

УДК 517.956.32

Ю. И. Черский

МЕТОД ПОЭТАПНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Существо метода проще всего выяснить на такой задаче. Рассмотрим уравнение с частными производными (гиперболического типа)

$$a(x)\,b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+[a(x)\beta(y)+b(x)\alpha(y)]\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\alpha(y)\beta(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$

$$+[a'(x)\,b(x)+b(x)\,c(x)+a(x)\,d(x)+b(x)\gamma(y)+a(x)\delta(y)]\frac{\partial u}{\partial x}+$$

$$+[\alpha'(y)\beta(y)+\beta(y)\gamma(y)+\alpha(y)\delta(y)+\beta(y)\,c(x)+\alpha(y)\,d(x)]\frac{\partial u}{\partial y}+$$

$$+[b(x)\,c'(x)+\beta(y)\gamma'(y)+(d(x)+\delta(y))(c(x)+\gamma(y))]\,u=g(x,y),\quad (1)$$

$$0<x<2\pi,\quad y>0,$$

где a, b, c, d, α, β, γ, δ — заданные достаточно гладкие функции; $g(x, y)$ — заданный свободный член.

Предположим, что

$$a(x)>\mathrm{const}>0,\quad b(x)>\mathrm{const}>0.\qquad (2)$$

Пусть требуется найти решение $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям (φ и ψ — заданные функции)

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<2\pi,\qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<2\pi\qquad (4)$$

и граничным условиям — условиям периодичности

$$u(0,y)=u(2\pi,y),\quad y>0,\qquad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}u(0,y)=\frac{\partial}{\partial x}u(2\pi,y),\quad y>0.\qquad (6)$$

Дополнительные предположения о заданных функциях будем делать по ходу изложения.

Коэффициенты в уравнении (1) подобраны нами так, что функцию $u(x, y)$ можно будет определить из уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

$$a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha(y)\frac{\partial u}{\partial y}+[c(x)+\gamma(y)]\,u=v(x,y),\quad 0<x<2\pi,\quad y>0,\qquad (7)$$

где свободный член $v(x, y)$ в свою очередь также находится как решение другого уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

$$b(x)\frac{\partial v}{\partial x}+\beta(y)\frac{\partial v}{\partial y}+[d(x)+\delta(y)]\,v=g(x,y),\quad 0<x<2\pi,\quad y>0.\qquad (8)$$

Нетрудно убедиться, что подстановка функции (7) в уравнение (8) приводит к уравнению (1).

Функцию $v(x, y)$ — решение уравнения (8) — строим классическим методом разделения переменных. Естественно, сначала следует получить возможно больше информации об этой функции, основываясь на равенстве

(7) и привлекая дополнительные условия (3) — (6). В частности, нетрудно получить одно начальное условие

$$v(x, 0) = a(x)\varphi'(x) + \alpha(0)\psi(x) + [c(x) + \gamma(0)]\varphi(x), \quad 0 < x < 2\pi. \qquad (9)$$

Так как уравнение (8) содержит по y лишь первую производную, то одного начального условия будет достаточно.

Ввиду того что уравнение (8) содержит и по x только первую производную, достаточно иметь для функции v всего одно (граничное) условие периодичности. Для его вывода положим в равенстве (7) сначала $x = 0$, а затем $x = 2\pi$:

$$a(0)u_x(0, y) + \alpha(y)u_y(0, y) + [c(0) + \gamma(y)]u(0, y) = v(0, y),$$
$$a(2\pi)u_x(2\pi, y) + \alpha(y)u_y(2\pi, y) + [c(2\pi) + \gamma(y)]u(2\pi, y) = v(2\pi, y).$$

Отсюда и из условий (5) и (6) находим

$$v(0, y) - v(2\pi, y) = [a(0) - a(2\pi)]u_x(0, y) + [c(0) - c(2\pi)]u(0, y).$$

Предположим, что выполнены равенства (довольно естественные) $a(0) = a(2\pi)$, $c(0) = c(2\pi)$. Тогда получим условие периодичности

$$v(0, y) = v(2\pi, y), \quad y > 0. \qquad (10)$$

В соответствии с методом разделения переменных функцию $v(x, y)$ строим в виде ряда

$$v(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{X}_k(x)\,\mathcal{Y}_k(y), \qquad (11)$$

где $\mathcal{X}_k(x)$ — «собственные функции», удовлетворяющие граничному условию

$$\mathcal{X}_k(0) = \mathcal{X}_k(2\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \qquad (12)$$

а также уравнению, которое можно получить из однородного уравнения вида (8):

$$b(x)\frac{\partial}{\partial x}[\mathcal{X}_k(x)Z(y)] + \beta(y)\frac{\partial}{\partial y}[\mathcal{X}_k(x)Z(y)] + (d(x) + \delta(y))[\mathcal{X}_k(x)Z(y)] = 0$$

путем разделения переменных:

$$b(x)\frac{\mathcal{X}'_k(x)}{\mathcal{X}_k(x)} + d(x) = -\beta(y)\frac{Z'(y)}{Z(y)} - \delta(y) = \lambda_k.$$

Здесь λ_k — постоянные.

Таким образом, функции $\mathcal{X}_k(x)$ должны удовлетворять уравнению

$$b(x)\mathcal{X}'_k(x) + [d(x) - \lambda_k]\mathcal{X}_k(x) = 0 \qquad (13)$$

и граничному условию (12). Собственные значения λ_k определяются так, чтобы однородная задача (12), (13) имела ненулевое решение.

Уравнение (13) решается просто: достаточно иметь его частное решение, которое можно взять в виде (используя одно из предположений (2))

$$\mathcal{X}_k(x) = \exp\int_0^x \frac{\lambda_k - d(s)}{b(s)}\,ds. \qquad (14)$$

Обратимся к условию (12), которое теперь примет вид

$$\exp 2k\pi i = \exp\int_0^{2\pi} \frac{\lambda_k - d(s)}{b(s)}\,ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Для упрощения дальнейших формул, не ограничивая общности, положим

$$\int_0^{2\pi} \frac{ds}{b(s)} = \int_0^{2\pi} \frac{s}{a(s)} = 1.$$

Тогда

$$\lambda_k = 2k\pi i + \int_0^{2\pi} \frac{d(s)}{b(s)}\, ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots \tag{15}$$

Эти значения нужно подставить в равенство (14), тем самым полностью определяя функции $\mathcal{X}_k(x)$.

Следующим шагом будет удовлетворение начальному условию (9). Используя равенство (11), получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{Y}_k(0)\, \mathcal{X}_k(x) = a(x)\, \varphi'(x) + \alpha(0)\, \psi(x) + [c(x) + \gamma(0)]\, \varphi(x), \, 0 < x < 2\pi.$$

Итак, стоящую в правой части известную функцию требуется разложить в ряд по функциям $\mathcal{X}_k(x)$ и определить его коэффициенты. Проделаем это.

Пусть данную функцию $h(x) \in L_2(0, 2\pi)$ нужно разложить в ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{X}_k(x) = h(x), \quad 0 < x < 2\pi. \tag{16}$$

Это нетрудно сделать ввиду простоты функций (14), которые можно представить в виде

$$\mathcal{X}_k(x) = A(x)\, e^{ik\,\omega(x)},$$

где

$$A(x) = \exp \int_0^x \left[\int_0^{2\pi} \frac{d(t)}{b(t)}\, dt - d(s) \right] \frac{ds}{b(s)}, \qquad \omega(x) = 2\pi \int_0^x \frac{ds}{b(s)}.$$

На функцию $A(x)$ можно разделить обе части равенства (16), так как существуют постоянные ν_0 и ν такие, что для всех $x \in [0, 2\pi]$ имеем $0 < \nu_0 < |A(x)| < \nu < \infty$.

Относительно функции $\omega(x)$ можно сказать, что она монотонно возрастает от 0 до 2π и имеет положительную гладкую производную. Этого достаточно для существования обратной функции $x = x(\omega)$, имеющей гладкую производную.

В силу сказанного равенству (16) можно придать вид обычного ряда Фурье в комплексной форме

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega} = h(x(\omega))/A(x(\omega)), \quad 0 < \omega < 2\pi. \tag{17}$$

Нетрудно видеть, что $h(x(\omega))/A(x(\omega)) \in L_2(0, 2\pi)$. Поэтому ряд Фурье будет сходиться в среднем квадратическом, причем как известно,

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(x(\omega))}{A(x(\omega))}\, e^{-ik\omega} d\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots .$$

Равенство (17) будет иметь место для почти всех значений ω.

Возвращаясь к переменной x, придадим коэффициентам c_k более простую форму

$$c_k = \int_0^{2\pi} \frac{h(x)\, dx}{\mathcal{X}_k(x)\, b(x)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ \ldots \tag{18}$$

Предположим, что $\varphi'(x) \in L_2(0, 2\pi)$, $\psi(x) \in L_2(0, 2\pi)$. Используя предыдущие результаты, находим

$$\mathcal{Y}_k(0) = \int_C^{2\pi} \{a(x)\, \varphi'(x) + \alpha(0)\, \psi(x) + [c(x) + \gamma(0)]\, \varphi(x)\} \frac{dx}{\mathcal{X}_k(x)\, b(x)}. \tag{19}$$

Для определения функций $\mathcal{Y}_k(y)$ следует, как известно, подставить ряд (11) в уравнение (8). Предполагая возможным почленное дифференцирование ряда, получаем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{b(x)\mathcal{X}'_k(x)\mathcal{Y}_k(y) + \beta(y)\mathcal{X}_k(x)\mathcal{Y}'_k(y) + \\ + [d(x) + \delta(y)]\mathcal{X}_k(x)\mathcal{Y}_k(y)\} = g(x, y).$$

С помощью свойства (13) избавляемся от производных $\mathcal{X}'_k$ и коэффициентов $b(x)$ и $d(x)$:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\beta(y)\mathcal{Y}'_k(y) + [\delta(y) + \lambda_k]\mathcal{Y}_k(y)\}\mathcal{X}_k(x) = g(x, y), \quad 0 < x < 2\pi, \quad y > 0.$$

Здесь постоянные λ_k определены равенствами (15).

Предположим, что заданная функция $g(x, y)$ для почти всех $y\ (>0)$ принадлежит по переменной x пространству $L_2(0, 2\pi)$. Тогда, снова применяя формулу (18), находим

$$\beta(y)\mathcal{Y}'_k(y) + [\delta(y) + \lambda_k]\mathcal{Y}_k(y) = \int_0^{2\pi} \frac{g(x, y)\,dx}{\mathcal{X}_k(x)\,b(x)}, \quad y > 0. \tag{20}$$

Итак, для определения $\mathcal{Y}_k(y)$ достаточно решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка (20) при дополнительном условии (19). Предположим существование постоянных ν_1 и ν_2 таких, что для почти всех $y > 0$ выполнены неравенства $0 < \nu_1 < |\beta(y)| < \nu_2 < \infty$. Тогда

$$\mathcal{Y}_k(y) = \left(\exp\left(-\int_0^y \frac{\delta(y) + \lambda_k}{\beta(y)}\,dy\right)\right) \times \\ \times \left\{\mathcal{Y}_k(0) + \int_0^y \left[\int_0^{2\pi} \frac{g(x, s)\,dx}{\mathcal{X}_k(x)\,b(x)} \exp\int_0^s \frac{\delta(\sigma) + \lambda_k}{\beta(\sigma)}\,d\sigma\right]\frac{ds}{\beta(s)}\right\},$$

где постоянные $\mathcal{Y}_k(0)$ определены интегралами (19).

Так как при почти всех положительных y ряд (11) сводится к обычному ряду Фурье, то его сходимость следует из известных свойств рядов Фурье.

Можно проверить, что построенная функция (11) действительно обладает свойствами (8), (9) и (10).

Определим функции $u(x, y)$ новым разделением переменных. Эту функцию строим как решение уравнения (7) при дополнительных условиях (3) и (5). Нетрудно установить, что найденная таким образом функция $u(x, y)$ будет удовлетворять уравнению (1) и всем дополнительным условиям (3) — (6).

Задача (3), (5), (7) по содержанию ничем не отличается от уже решенной задачи (8), (9), (10). При предположении, что существуют постоянные ν_3 и ν_4 такие, что $0 < \nu_3 < |\alpha(y)| < \nu_4 < \infty$, можно выписать формулы, определяющие решение

$$u(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k(x)Y_k(y),$$

где

$$X_k(x) = \exp\int_0^x \left[2k\pi i + \int_0^{2\pi} \frac{c(t)}{a(t)}\,dt - c(s)\right]\frac{ds}{a(s)};$$

$$Y_k(y) = \left\{Y_k(0) + \int_0^y \left[\int_0^{2\pi} \frac{v(x, s)\,dx}{X_k(x)\,a(x)} \exp\int_0^s \frac{\gamma(\sigma) + \mu_k}{\alpha(\sigma)}\,d\sigma\right]\frac{ds}{a(s)}\right\} \times$$

$$\times \exp\left(-\int_0^y \frac{\gamma(y)+\mu_k}{\alpha(y)}\,dy\right), \tag{21}$$

$$\mu_k = 2k\pi i + \int_0^{2\pi} \frac{c(s)}{a(s)}\,ds, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В формуле (21) постоянные $Y_k(0)$ такие:

$$Y_k(0) = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(x)\,dx}{X_k(x)\,a(x)}.$$

На этом фактическое построение функции $u(x, y)$ можно считать законченным.

Обоснование предложенного метода не требует никаких новых идей по сравнению с обоснованием обычного метода Фурье (см., например, [2]) и даже несколько проще.

На основании изложенного можно сделать такие выводы.

1. Существует ограниченный класс задач, для решения которых целесообразно использовать изложенный метод. Сюда, в частности, входят некоторые задачи, к которым обычный метод разделения переменных неприменим.

2. Преимуществом предлагаемого метода является то, что определение собственных значений и собственных функций не составляет проблемы.

3. Другое преимущество — даже для уравнений с переменными коэффициентами аппаратом решения служат обычные, а не обобщенные ряды или интегралы Фурье. Обычный ряд и интеграл Фурье обладают некоторыми замечательными свойствами, которые не всегда сохраняются у обобщенных рядов или интегралов. Здесь прежде всего имеются в виду свойства аналитической продолжимости, которые позволяют приводить смешанные задачи математической физики к краевым задачам теории аналитических функций.

Информация о других методах решения задач для уравнений с неразделяющимися переменными имеется в работе [1].

1. *Каленюк П. І., Скоробогатько В. Я.* Якісні методи теорії диференціальних рівнянь.— К.: Наук. думка, 1977.— 123 с.
2. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.— 400 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.03.79

УДК 512.8

В. Р. Зелиско

О СТРОЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ОБРАТИМЫХ МАТРИЦ

Рассмотрим неособенную полиномиальную $n \times n$-матрицу $A(x)$ с элементами из $\mathbb{C}[x]$. Для нее существуют классы обратимых над $\mathbb{C}[x]$ матриц $\{P(x)\}$ и $\{Q(x)\}$ такие, что для каждых матриц $P(x) \in \{P(x)\}$ существуют $Q(x) \in \{Q(x)\}$, что

$$P(x)\,A(x)\,Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \ldots, \varepsilon_n(x)), \tag{1}$$

где $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Матрицу $\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ называют формой Смита полиномиальной матрицы $A(x)$.