УДК 517.52

*Х. И. Кучминская*

## О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ЦЕПНЫМИ И ВЕТВЯЩИМИСЯ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ

Разложения элементарных функций в цепные дроби впервые появились еще в работах Эйлера и Лагранжа как решения определенных дифференциальных уравнений [10].

Начало систематическому изучению разложений в цепные дроби и использованию их в качестве аппарата исследований было положено П. Л. Чебышевым. Ему, в частности, принадлежит идея привлечения цепных дробей для построения рациональных приближений. Исследования П. Л. Чебышева в этом направлении были развиты А. А. Марковым в связи с известной проблемой моментов. Параллельно с А. А. Марковым при решении этой же проблемы Стилтьес также использует цепные дроби и развивает их теорию.

В начале XX в. несколько ослабевает интерес к исследованиям по разложениям в цепные дроби; во-первых, функциональные цепные дроби как нелинейный математический объект требовали самостоятельного изучения, во-вторых, не были настолько хорошо развиты вычислительные методы и громоздкость и нестандартность вычислений цепными дробями, возможно, отталкивала исследователей. По-видимому, по этой же причине одна из первых интерполяционных формул в виде цепной дроби, построенная датским математиком Тиле в 1909 г., получила свое применение лишь в последние десятилетия [11, 12]. С развитием электронно-вычислительной техники цепные дроби начинают широко использоваться в вычислительной математике.

Среди задач математического анализа особое место занимают задачи эффективного приближения функций многих переменных. Поэтому разработка аппроксимационного аппарата, обладающего простотой и надежностью при реализации, представляется актуальной.

Одним из эффективных аппаратов практического построения рациональных приближений функций многих переменных является аппарат ветвящихся цепных дробей, аналитическая теория которых в настоящее время развивается В. Я. Скоробогатько и его учениками [1, 2].

Нами рассмотрены некоторые вопросы приближения функций рациональными функциями. Построенные формулы более пригодны вблизи точек, где приближаемая функция обращается в бесконечность, чем полиномы, поскольку последние нигде в конечной области не обращаются в бесконечность. Формулы, полученные в первых двух пунктах, могут быть использованы для приближения разрывных функций; дроби, которые получаются преобразованием двойного степенного ряда, по-видимому, можно будет использовать при нахождении приближенных решений краевых задач математической физики.

**1. Интерполяция функций многих переменных.** Пусть для действительной функции $f(P)$, $P = (x_1, \ldots, x_N) \in R^N$ заданы ее значения в точках $P_{mi}^{k_m} = (x_{1m}, x_{2m}, \ldots, x_{k_m m}, x_{k_m+1i}, \ldots, x_{Ni})$, $k_m = \overline{1, N}$, не лежащих одновременно в подпространстве $R^k$, $k < N$, причем $P_{mi}^{k_m} = P_m$, если $k_m = N$

и $P^{k_m}_{mi} = P_i$, если $k_m = 0$, а $P = (x_1, \ldots, x_N)$ — произвольная, но фиксированная точка из $R^N$.

**Определение 1.** Частными обратными разностями $n$-го ($n \geqslant 1$) порядка ${}_{x_{k_n}\ldots x_{k_1}}V_n(P_0, P_n; P_{n-1}, \ldots, P_1)$ по аргументам $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}$ ($k_i = 1, 2, \ldots, N$; $i = 1, 2, \ldots, n$) называются отношения вида

$$
{}_{x_{k_n}\ldots x_{k_1}}V_n(P_0, P_n; P_{n-1}, \ldots, P_1) =
$$
$$
= (x_{k_n0} - x_{k_nn})\{{}_{k_n\ldots k_1}f(P_0, P_n; P_{n-1}, \ldots, P_1)\}^{-1}, \tag{1}
$$

где

$$
{}_{k_n\ldots k_1}f(P_0, P_n; P_{n-1}, \ldots, P_1) = \frac{1}{2}\{{}_{x_{k_{n-1}}\ldots x_{k_1}}V_{n-1}(P^{k_n-1}_{n0}, P_{n-1}; P_{n-2}, \ldots, P_1) -
$$
$$
- {}_{x_{k_{n-1}}\ldots x_{k_1}}V_{n-1}(P^{k_n}_{n0}, P_{n-1}; P_{n-2}, \ldots, P_1) + {}_{x_{k_{n-1}}\ldots x_{k_1}}V_{n-1}(P^{k_n}_{0n}, P_{n-1};
$$
$$
P_{n-2}, \ldots, P_1) - {}_{x_{k_{n-1}}\ldots x_{k_1}}V_{n-1}(P^{k_n-1}_{0n}, P_{n-1}; P_{n-2}, \ldots, P_1)\}; \quad {}_{x_{k_0}}V_0(P) = f(P). \tag{2}
$$

Отсюда следует, что

$$
{}_{k_n\ldots k_1}f(P_0, P_n; P_{n-1}, \ldots, P_1) = -{}_{k_n\ldots k_1}f(P_n, P_0; P_{n-1}, \ldots, P_1)
$$

при произвольных $k_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k_i = 1, 2, \ldots, N$), а значит, частные обратные разности $n$-го порядка являются симметрическими функциями точек $P_0$ и $P_n$.

Кроме того, учтем что для частных обратных разностей $n$-го порядка справедливы соотношения

$$
\sum_{k_n=1}^{N} {}_{k_n\ldots k_1}f(P_0, P_n; P_{n-1}, \ldots, P_1) = {}_{x_{k_{n-1}}\ldots x_{k_1}}V_{n-1}(P_0, P_{n-1}; P_{n-2},
$$
$$
\ldots, P_1) - {}_{x_{k_{n-1}}\ldots x_{k_1}}V_{n-1}(P_n, P_{n-1}; P_{n-2}, \ldots, P_1) \tag{3}
$$

и

$$
{}_{x_{k_{n-1}}\ldots x_{k_1}}V_{n-1}(P_0, P_{n-1}; P_{n-2}, \ldots, P_1) =
$$
$$
= {}_{x_{k_{n-1}}\ldots x_{k_1}}V_{n-1}(P_n, P_{n-1}; P_{n-2}, \ldots, P_1) + \sum_{k_n=1}^{N} \frac{x_{k_n} - x_{k_nn}}{{}_{x_{k_n}\ldots x_{k_1}}V_n(P_0, P_n; \ldots, P_1)}. \tag{4}
$$

Соотношение (4) соответствует формуле конечных приращений Лагранжа и служит отправным пунктом для построения интерполяционной дроби для функции $f(P)$ при различных узлах интерполяции $P_1, P_2, \ldots, P_m$ [8, 9]:

$$
f(P) = f(P_1) + \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k_i=1}^{N} \frac{x_{k_i} - x_{k_ii}|}{|{}_{x_{k_i}\ldots x_{k_1}}V_i(P_{i+1}, P_i, \ldots, P_1)} =
$$
$$
= f(P_1) + \sum_{k_1=1}^{N} \cfrac{x_{k_1} - x_{k_11}}{{}_{x_{k_1}}V_1(P_2, P_1) + \sum\limits_{k_2=1}^{N} \cfrac{x_{k_2} - x_{k_22}}{{}_{x_{k_2}x_{k_1}}V_2(P_3, P_2; P_1) + \ddots}} \tag{5}
$$
$$
\ddots + \sum_{k_{m-1}=1}^{N} \frac{x_{k_{m-1}} - x_{k_{m-1}m-1}}{{}_{x_{k_{m-1}}\ldots x_{k_1}}V_{m-1}(P_m, P_{m-1}; \ldots, P_1)}
$$

Образуя новые частные обратные разности ${}_{x_{k_m}\ldots x_{k_1}}\rho_m(P, P_m, P_{m-1}, \ldots, P_1)$ из соотношений

$$
{}_{x_{k_m}\ldots x_{k_1}}\rho_m(P, P_m; P_{m-1}, \ldots, P_1) = {}_{x_{k_m}\ldots x_{k_1}}V_m(P, P_m; P_{m-1}, \ldots, P_1) +
$$

$$+ x_{k_{m-2}}\dots x_{k_1} V_{m-2}(P_{m-1}, P_{m-2}; P_{m-3}, \dots, P_1) +$$
$$+ x_{k_{m-4}}\dots x_{k_1} V_{m-4}(P_{m-3}, P_{m-4}; \dots, P_1) + \dots, \tag{6}$$

получаем интерполяционную формулу типа Тиле.

Известно еще несколько формул в виде многомерных цепных дробей (см., например, [2, 3, 5]), но наибольший интерес, по-видимому, представляет следующая интерполяционная формула для $m^2$ узлов интерполяции $P_{s,k} = (x_s, y_k) \in D \subset R^2$, $1 \leqslant s$, $k \leqslant m$ для функции двух переменных:

$$f(x, y) = \Phi_0(x, y) + \cfrac{(x - x_1)(y - y_1)}{\Phi_1(x, y) + \cfrac{(x - x_2)(y - y_2)}{\Phi_2(x, y) + \genfrac{}{}{0pt}{}{}{\ddots + \cfrac{(x - x_{m-1})(y - y_{m-1})}{\Phi_{m-1}(x, y)}}}} = \frac{P_m(x, y)}{Q_m(x, y)}, \tag{7}$$

где

$$\Phi_k(x, y) = \rho_{kk}(x_1, \dots, x_{k+1}, y_1, \dots, y_{k+1}) + \sum_{l=k+1}^{m-1} \frac{x - x_l|}{|\rho_{lk}(x_1, \dots, x_{l+1}, y_1, \dots, y_{k+1})} +$$
$$+ \sum_{l=k+1}^{m-1} \frac{y - y_l|}{|\rho_{kl}(x_1, \dots, x_{k+1}, y_1, \dots, y_{l+1})};$$

$$\rho_{kn}(x_1, \dots, x_k, x_0, y_1, \dots, y_n, y_0) =$$
$$= \begin{cases} (x_0 - x_k)\{\rho_{k-1n}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_0, y_1, \dots, y_n, y_0) - \\ - \rho_{k-1n}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_n, y_0)\}^{-1}, \quad k > n; \\ (y_0 - y_n)\{\rho_{kn-1}(x_1, \dots, x_k, x_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_0) - \\ - \rho_{kn-1}(x_1, \dots, x_k, x_0, y_1, \dots, y_n)\}^{-1}, \quad k < n; \\ (x_0 - x_k)(y_0 - y_k)\{\rho_{k-1k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_0, y_1, \dots, y_{k-1}, \\ y_0) - \rho_{k-1k-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_0, y_1, \dots, y_k) + \\ + \rho_{k-1k-1}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k) - \\ - \rho_{k-1k-1}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{k-1}, y_0)\}^{-1}, \quad k = n; \end{cases}$$

$$\rho_0(x, y) = f(x, y) \quad k, n = 0, 1, 2, \dots, m - 1.$$

Формула (7) имеет довольно простую структуру и интерполирует функцию двух переменных в числе узлов, равном числу определяющих ее параметров. Кроме того, для этой дроби удается выписать остаточный член в удобной для исследования форме.

**Теорема 1.** Пусть функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $\dfrac{\partial^{k+s} f(x, y)}{\partial x^k \partial y^s}$, $0 \leqslant k$, $s \leqslant m$ в области $D = \{a_1 \leqslant x \leqslant b_1; a_2 \leqslant y \leqslant b_2\}$, содержащей узлы интерполяции $(x_i, y_j)$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$.

Тогда внутри области $D$ для произвольной точки $(x, y) \in D$, не являющейся полюсом интерполяционной дроби (7), остаточный член интерполяционной формулы (7) может быть записан в виде

$$R_m(x, y) = \frac{1}{m!\, Q_m(x, y)} \left\{ \prod_{i=1}^{m} (x - x_i) \frac{\partial^m \psi(\xi, y)}{\partial x^m} + \prod_{i=1}^{m} (y - y_i) \frac{\partial^m \psi(x, \eta)}{\partial y^m} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{m!} \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)(y - y_i) \frac{\partial^{2m} \psi(\bar{\xi}, \bar{\eta})}{\partial x^m \partial y^m} \right\},$$

где

$$\psi(x, y) = f(x, y)\, Q_m(x, y) - P_m(x, y); \;\; a_1 < \xi, \bar{\xi} < b_1; \;\; a_2 < \eta, \bar{\eta} < b_2.$$

Доказательство этой теоремы следует из построения интерполяционного полинома Ньютона для функции $\psi(x, y)$ по точкам $(x_i, y_j)$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Формулы (5), (7) при $N = 1$ совпадают с известными.

Получение формулы, аналогичной формуле (7), для $N > 2$ не представляет принципиальных трудностей, и вследствие громоздкости ее не приводим.

Проиллюстрируем качество интерполяции функций формулами (5) и (7).

Пример 1. Пусть функция $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1{,}5}$ задана в точках (0,0), (2,1), (1,2), (0,1), (0,2), (2,0), (2,2), (1,0), (1,1). Вычислив значение функции в точке (0,5; 0,5) по интерполяционной дроби и по интерполяционному полиному Ньютона, построенному по тем же узлам интерполяции, получим следующие результаты: по дроби —0,90368, по полиному —0,18242, точное значение равно —1.

Пример 2. Пусть функция $f(x, y) = \dfrac{1+x}{1-y}$ задана своими значениями в точках (0, 0), $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, (2.2). Строим для нее интерполяционный полином Ньютона и дробь (7). Результат вычислений значения функции в точке (0; 1,1) по дроби —10, по полиному —2,146, точное значение $f(0;\ 1{,}1) = -10$.

2. **Разложение функций в цепные и ветвящиеся цепные дроби в окрестности заданной точки.** При определении частных обратных разностей (1) предполагали, что все узлы интерполяции $P_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{Ni}, i = 1, 2, \ldots \ldots, m)$ различны. Если теперь предположить, что два или более узлов интерполяции совпадают, то получим последовательность совпадающих частных обратных разностей. Особо интересен случай, когда все узлы интерполяции совпадают.

**Определение 2.** Частной обратной производной функции $f(P)$ $m$-го порядка называется выражение вида

$$\overset{(m)}{{}_{x_{k_m}\ldots x_{k_1}}}f(P) = \lim_{P_i\to P} \{{}_{x_{k_m}\ldots x_{k_1}}V_m(P, P_m; P_{m-1}, \ldots, P_1) + {}_{x_{k_{m-2}}\ldots x_{k_1}}V_{m-2}(P_{m-1}, \ldots, P_1) + \ldots\},$$

где $k_i = 1, 2, \ldots, N$; $i = 1, 2, \ldots, m$; ${}_{x_{k_0}}V_0(P) = f(P)$, $m = 1, 2, \ldots$;

$${}_{x_{k_{m-2}}\ldots x_{k_1}}V_{m-2}(P_{m-1}, P_{m-2}; \ldots, P_1) = 0 \text{ при } m = 1.$$

Для частной обратной производной установлено, что

$$\overset{(m)}{{}_{x_{k_m}\ldots x_{k_1}}}f(P) = \overset{(m-2)}{{}_{x_{k_{m-2}}\ldots x_{k_1}}}f(P) + m'_{x_{k_m}}[\overset{(m-1)}{{}_{x_{k_{m-1}}\ldots x_{k_1}}}f(P)], \quad m \geqslant 2, \tag{8}$$

$$\overset{'}{{}_{x_{k_1}}}f(P) = \{f'_{x_{k_1}}(P)\}^{-1}, \quad \overset{(0)}{{}_{x_{k_0}}}f(P) = f(P).$$

Если функция $f(P)$ удовлетворяет условиям, обеспечивающим предельный переход в формуле (5) при $P_i \to P_0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, то полученная в пределе формула

$$f(P) = f(P_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_m=1}^{N} \frac{x_{k_m} - x_{k_m 0}|}{|\, m'_{x_{k_m}} [\overset{(m-1)}{{}_{x_{k_{m-1}}\ldots x_{k_1}}}f(P)]_{P=P_0}} \tag{9}$$

является $N$-мерным аналогом формулы Тиле

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0|}{|\,'f(x_0)} + \frac{x - x_0}{|2'[\,'f(x)]_{x=x_0}} + \cdots + \frac{x - x_0|}{|\,n'[{}^{(n-1)}f(x)]_{x=x_0}} + \ldots, \tag{10}$$

где

$$\dot{f}(x) = {}^{(n-2)}f(x) + n'\,[{}^{(n-1)}f(x)],\ n \geqslant 2;\quad {}'f(x) = \frac{1}{f'(x)};\quad {}^{(0)}f(x) = f(x).$$

**Определение 3.** Функция $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, определенная в некоторой области $G \subset R^N$, принадлежит классу ${}^{\infty}T\,(G)$, если для нее существует бесконечное число частных обратных производных в каждой точке области $G$.

Для дроби (9) установлены условия ее равномерной сходимости.

**Теорема 2.** Пусть функция $f(x) \in {}^{\infty}T\,(G)$ ($G$ — некоторая ограниченная область из $R^N$) разлагается в дробь (9) и существуют положительные константы $M$ и $\beta$ ($\beta < \frac{1}{4N}$, $N$ — число веток ветвлений) такие, что для произвольного набора индексов $k_1, k_2, \ldots, k_i$ ($i \geqslant 1$)

$$\left|\frac{x_{k_1} - x_{k_1 0}}{\alpha_{k_1}}\right| \leqslant M,\quad \frac{x_{k_i} - x_{k_i 0}}{\alpha_{k_1 k_2 \ldots k_{i-1}}\alpha_{k_1 k_2 \ldots k_i}} + \beta \geqslant 0,\ k = 2, 3, \ldots$$

$$\alpha_{k_1 k_2 \ldots k_i} = i'_{x_{k_i}}[{}^{(i-1)}_{x_{k_{i-1}} \ldots x_{k_1}}f(x)]_{x=x_0};\quad \alpha_{k_0} = f(x_0).$$

Тогда дробь (9) равномерно сходится, если ряд $\Sigma\pi_i$ расходится,

$$\pi_i = \inf_{k_1, \ldots, k_i, x \in G} |\alpha_{k_1 \ldots k_{i-1}}\alpha_{k_1 \ldots k_i}/(x_{k_i} - x_{k_i 0})|.$$

При доказательстве этой теоремы [9] существенно используется формула разности между подходящими дробями разных порядков и свойства бесконечного произведения.

**Теорема 3.** Пусть функция $f(x) \in {}^{\infty}T\,(G)$, $G = \{0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = \overline{1, N}\}$ разлагается в дробь (9) и выполняются условия

$$|\alpha_{k_1 \ldots k_i}| = i\,|'_{x_{k_i}}[{}^{(i-1)}_{x_{k_{i-1}} \ldots x_{k_1}}f(x)]_{x=x_0}| \geqslant \alpha = \begin{cases} 1 + N + \varepsilon, & N = 1 \\ 1 + N, & N \geqslant 2 \end{cases}$$

$$x_0 \in G,\ N = 1, 2, \ldots,\ \varepsilon > 0,$$

тогда дробь (9) равномерно сходится в области $G$.

Теорема 3 является следствием теоремы 2.

Равномерная сходимость дроби еще не выясняет вопрос о сходимости ее к функции, которую разложили в эту дробь, поэтому исследования в этом направлении в настоящее время проводятся и еще далеки от завершения [1, 6]. Относительно одномерного случая нами доказана следующая [4] теорема.

**Теорема 4.** Пусть функция $f(x)$ вида $f(x) = \frac{f_1(x)}{(x - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x - \alpha_p)^{k_p}}$, где $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = m$, $f_1(x) \in C^n\,[0, 1]$ ($n > m$) бесконечное число раз обратнодифференцируема на промежутке $[0, 1]$, за исключением конечного числа полюсов $\{\alpha_k\}_{k=1}^{p}$, разлагается в цепную дробь (10) и пусть существуют константы $M > 0$ и $\beta \geqslant 3$, такие, что

$$\max_{x \in [0,1]} |f_1^{(i)}(x)| \leqslant M,\quad i = 2, 3, \ldots$$

$$\beta \geqslant j\,|'[{}^{(j-1)}f(x)]_{x=x_0}| \geqslant 3,\quad x_0 \in [0, 1],\ j = 1, 2, \ldots$$

Тогда на промежутке $[0, 1]$, за исключением полюсов, при любом натуральном $n \geqslant 3$ имеет место оценка

$$\left|f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)}\right| < \frac{M\sqrt{2}}{4}\,\frac{L^{n-1}}{(n+2)^{n/2}|(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_p)^{k_p}|},$$

где $L$ — некоторая положительная константа, т. е. $\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \to f(x)$ при $n \to \infty$ равномерно на множестве тех значений $x$ из $[0, 1]$, для которых $|(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_p)^{k_p}| \geqslant K > 0$.

**Следствие 1.** Если функция $f(x)$ не имеет полюсов на промежутке $[0, 1]$, то при выполнении условий теоремы оценка приближения $n$-й подходящей дробью $P_n(x)/Q_n(x)$ дроби (10) принимает вид

$$|R_n(x, x_0)| = \left| f(x) - \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \right| < \frac{M\sqrt{2}}{4} \frac{L^{n-1}}{(n+2)^{n/2}}.$$

**Следствие 2.** Функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы, представляется цепной дробью.

Использованием методики построения многоточечных формул Тейлора построены аппроксимационные многоточечные формулы в виде цепных дробей и многоточечные формулы типа Обрешкова [2, 8].

**3. Разложение двойного степенного ряда в ветвящиеся цепные дроби.** Связь цепных дробей со степенными рядами рассматривалась и изучалась многими авторами. Первые публикации по этому вопросу относятся еще к началу XIX в. [10,13], поэтому естественно было установить аналогичные связи ветвящихся цепных дробей с кратными степенными рядами.

Нам удалось построить алгоритм преобразования двойного степенного ряда в соответствующую и присоединенную ветвящиеся цепные дроби, т. е. такие дроби, разложение произвольной $n$-й подходящей дроби которых в степенной ряд совпадает с исходным степенным рядом до всех членов степени $n$ и $2n$ соответственно [7].

Справедлива такая теорема.

**Теорема 5. 1.** Двойной степенной ряд $\sum\limits_{i+j\geqslant 0}^{\infty} a_{ij}x^iy^j$ разлагается в ветвящуюся цепную дробь

$$a_{00} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}\omega_{i0}^{(1)}x\,|}{|\,1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}\omega_{0i}^{(1)}y\,|}{|\,1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{11}^{(i-1)}xy\,|}{\left|1 + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j-1}\omega_{j0}^{(i+1)}x\,|}{|\,1} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+j-1}\omega_{0j}^{(i+1)}y\,|}{|\,1}\right.}, \tag{11}$$

или

$$a_{00} + \frac{k_{10}^{(1)}x}{1 + l_{10}^{(1)}x - \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{k_{i0}^{(1)}x^2\,|}{|\,1 + l_{i0}^{(1)}x}} + \frac{k_{01}^{(1)}y}{1 + l_{01}^{(1)}y - \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{k_{0i}^{(1)}y^2\,|}{|\,1 + l_{0i}^{(1)}y}} + \tag{12}$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\gamma_{11}^{(i-1)}xy\,|}{\left|1 + \frac{(-1)^i k_{10}^{(i+1)}x}{1 + (-1)^i l_{10}^{(i+1)}x - \sum\limits_{j=2}^{\infty} \frac{k_{j0}^{(i+1)}x^2\,|}{|\,1 + (-1)^i l_{j0}^{(i+1)}x}} + \frac{(-1)^i k_{01}^{(i+1)}y}{1 + (-1)^i l_{01}^{(i+1)}y - \sum\limits_{j=2}^{\infty} \frac{k_{0j}^{(i+1)}y^2\,|}{|\,1 + (-1)^i l_{0j}^{(i+1)}y}}\right.}$$

тогда и только тогда, когда все определители $\varphi_{ij,i(1-j)}^{(k)}$, $\psi_{ij,i(1-j)}^{(k)}$ или $\varphi_{ij,i(1-j)}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, i = 1, 2, \ldots, j = 0, 1$ отличны от нуля,

$$\varphi_{ij,i(1-j)}^{(k)} = \begin{vmatrix} \gamma_{1j,1(1-j)}^{(k)} & \gamma_{2j,2(1-j)}^{(k)} & \ldots & \gamma_{ij,i(1-j)}^{(k)} \\ \gamma_{2j,2(1-j)}^{(k)} & \gamma_{3j,3(1-j)}^{(k)} & \ldots & \gamma_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{ij,i(1-j)}^{(k)} & \gamma_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k)} & \ldots & \gamma_{(2i-1)j,(2i-1)(1-j)}^{(k)} \end{vmatrix},$$

$$\psi_{ij,i(1-j)}^{(k)} = \begin{vmatrix} \gamma_{2j,2(1-j)}^{(k)} & \gamma_{3j,3(1-j)}^{(k)} & \ldots & \gamma_{ij,i(1-j)}^{(k)} \\ \gamma_{3j,3(1-j)}^{(k)} & \gamma_{4j,4(1-j)}^{(k)} & \ldots & \gamma_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{ij,i(1-j)}^{(k)} & \gamma_{(i+1)j,(i+1)(1-j)}^{(k)} & \ldots & \gamma_{(2i-2)j,(2i-2)(1-j)}^{(k)} \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{ij}^{(k)} = \sum_{p+m=1}^{i+j} (-1)^{p+m-1} \gamma_{i-p,j-m}^{(k)} \frac{\gamma_{p+1,m+1}^{(k-1)}}{\gamma_{11}^{(k-1)}}; \quad \gamma_{00}^{(k)} = 1; \quad \gamma_{ij}^{(0)} = a_{ij}$$

$$\gamma_{i-p,j-m}^{(k)} = 0, \text{ если } i - p < 0 \text{ или } j - m < 0.$$

2. Представление двойного степенного ряда в виде дробей (11) или (12) единственно.

3. Дроби (11) и (12) являются соответственно соответствующей и присоединенной ветвящимися цепными дробями для двойного степенного ряда.

Коэффициенты дробей (11) и (12) вычисляются по формулам, использующим коэффициенты исходного ряда [7]. В одномерном случае дроби (11) и (12) совпадают с известными.

Предположим, что функция $f(x, y)$, заданная в некоторой ограниченной области $G \subset R^2$, удовлетворяет условиям, обеспечивающим ее разложение в $n$-ю подходящую дробь дроби (11), тогда справедливо такое утверждение.

**Теорема 6.** Пусть в ограниченной области $G \subset R^2$ функция $f(x, y) \in C^{n,n}(G)$ приближается $n$-й подходящей дробью дроби (11). Тогда для остаточного члена формулы

$$f(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{Q_n(x, y)} + R_n(f; x, y),$$

где $P_n(x)/Q_n(x)$ — $n$-я подходящая дробь дроби (11) [7], во всякой точке $(x, y)$, отличной от полюсов $Q_n(x, y)$, справедливо равенство

$$R_n(f; x, y) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial^{n+1} [f(x, y) Q_n(x, y) - P_n(x, y)]_{(x,y)=(\xi,\eta)}}{\partial x^k \partial y^{n+1-k}} \frac{x^k y^{n+1-k}}{k!\,(n+1-k)!\,Q_n(x, y)}, \tag{13}$$

где $\xi$, $\eta$ — некоторая внутренняя точка области $G$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью построения вспомогательной функции, для которой справедлива теорема Лагранжа, а также с учетом того, что дробь (11) является соответствующей дробью.

Используя ту же методику, можно получить аналогичные результаты для $n$-кратных ($n > 2$) степенных рядов.


1. *Боднар Д. И.* Элементы аналитической теории ветвящихся цепных дробей : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1977.— 16 с.
2. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування.— К. : Наук. думка, 1974.— 270 с.
3. *Боднарчук П. И., Кучминская Х. И.* Интерполяционная и функциональная формулы для функций многих переменных в виде ветвящихся цепных дробей.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 2, с. 31—36.
4. *Кучминская Х. И.* Об одном классе функций, представимых цепными дробями Тиле.— В кн.: Материалы II конф. мол. ученых : Зап. науч. центра АН УССР. Секция мат. наук. Ужгород, 1975, с. 75—79. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1734—76 ДЕП. (на укр. языке).— РЖ Математика, 1976, № 9, 9Б 813 Деп.
5. *Кучминская Х. И.* Приближение функций двух переменных ветвящимися цепными дробями с полиномиальными компонентами.— В кн.: Мат. сборник. Киев : Наук. думка, 1976, с. 31—34.
6. *Кучмінська Х. Й.* Про збіжність до функції її розкладу в гіллястий ланцюговий дріб.— В кн.: Теоретичні і прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 73—77.
7. *Кучминская Х. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 7, с. 614—617.
8. *Кучминская Х. И.* Аппроксимация и интерполяция функций цепными и ветвящимися цепными дробями : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1978.— 16 с.
9. *Кучминская Х. И., Боднар Д. И.* Вычислительная устойчивость разложений функций многих переменных в ветвящиеся цепные дроби.— В кн.: Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры. Таганрог, 1977, вып. 8, с. 145—151.
10. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа.— М. : ГИТТЛ, 1956.— 203 с.
11. *Brezinski C.* Application dop-algorithme á la quadrature numérique.— C. r. Acad. sci. Paris, 1970, **270**, N 19, p. A1252—A1253.

12. *Wynn P.* Continued fractions whose coefficients obey a noncommutative law of multiplication.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1963, 12; N 4, p. 273—312.
13. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions.— New York, 1948.— 433 p.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 19.02.79

УДК 517.956.32

*Ю. И. Черский*

## МЕТОД ПОЭТАПНОГО РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Существо метода проще всего выяснить на такой задаче. Рассмотрим уравнение с частными производными (гиперболического типа)

$$a(x)\,b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+[a(x)\beta(y)+b(x)\alpha(y)]\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\alpha(y)\beta(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$
$$+[a'(x)\,b(x)+b(x)\,c(x)+a(x)\,d(x)+b(x)\gamma(y)+a(x)\,\delta(y)]\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+[\alpha'(y)\beta(y)+\beta(y)\gamma(y)+\alpha(y)\delta(y)+\beta(y)\,c(x)+\alpha(y)\,d(x)]\frac{\partial u}{\partial y}+$$
$$+[b(x)\,c'(x)+\beta(y)\gamma'(y)+(d(x)+\delta(y))(c(x)+\gamma(y))]\,u=g(x,y),\quad(1)$$
$$0<x<2\pi,\quad y>0,$$

где $a$, $b$, $c$, $d$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ — заданные достаточно гладкие функции; $g(x, y)$ — заданный свободный член.

Предположим, что

$$a(x)>\text{const}>0,\quad b(x)>\text{const}>0.\qquad(2)$$

Пусть требуется найти решение $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям ($\varphi$ и $\psi$ — заданные функции)

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad 0<x<2\pi,\qquad(3)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}u(x,0)=\psi(x),\quad 0<x<2\pi\qquad(4)$$

и граничным условиям — условиям периодичности

$$u(0,y)=u(2\pi,y),\quad y>0,\qquad(5)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}u(0,y)=\frac{\partial}{\partial x}u(2\pi,y),\quad y>0.\qquad(6)$$

Дополнительные предположения о заданных функциях будем делать по ходу изложения.

Коэффициенты в уравнении (1) подобраны нами так, что функцию $u(x, y)$ можно будет определить из уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

$$a(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha(y)\frac{\partial u}{\partial y}+[c(x)+\gamma(y)]\,u=v(x,y),\quad 0<x<2\pi,\quad y>0,\qquad(7)$$

где свободный член $v(x, y)$ в свою очередь также находится как решение другого уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

$$b(x)\frac{\partial v}{\partial x}+\beta(y)\frac{\partial v}{\partial y}+[d(x)+\delta(y)]\,v=g(x,y),\quad 0<x<2\pi,\quad y>0.\qquad(8)$$

Нетрудно убедиться, что подстановка функции (7) в уравнение (8) приводит к уравнению (1).

Функцию $v(x, y)$ — решение уравнения (8) — строим классическим методом разделения переменных. Естественно, сначала следует получить возможно больше информации об этой функции, основываясь на равенстве