при $a = 0{,}125$, $b = 1$ равны 1,019 (1,024) и —0,344 (—0,349). В скобках приведены точные значения напряжений, полученные на основании работы [5]. При вычислениях оказалось достаточным удерживать в рядах три-четыре члена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шерман Д. И.* О напряженном состоянии некоторых запрессованных деталей.— Изв. АН СССР. ОТН, 1948, № 9, с. 1371—1389.
2. *Амен-заде Ю. А.* Напряженная посадка в случае плоской задачи и вдавливание штампа в многосвязную полуплоскость.— В кн.: Развитие теории контактных задач в СССР. М. : Наука, 1976. с. 411—446.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Наука, 1966.— 707 с.
4. *Максимович В. Н., Пляцко Г. В.* Применение метода инверсии к определению напряжений в неоднородных телах.— Прикл. механика, 1974, 10, № 10, с. 70—76.
5. *Черепанов Г. П., Кочаров Р. С.; Соткилава О. В.* Об одном трещиновидном дефекте в упругой плоскости.— Прикл. механика, 1977, 13, № 2, с. 48—55.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.02.78

УДК 539.3

А. И. Жалило

ВЛИЯНИЕ ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОЗЛЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОТВЕРСТИЙ В ТРЕХСЛОЙНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

В реальных конструкциях с целью снижения концентрации напряжений контуры отверстий подкрепляются упругими элементами. Рассмотрим трехслойную сферическую оболочку с легким заполнителем, ослабленную произвольным криволинейным подкрепленным отверстием. Оболочка находится под действием постоянной внешней нагрузки. Примем, что подкрепляющее ребро представляет собой тонкую упругую нить, обладающую жесткостями на изгиб и растяжение. Такую расчетную схему больше всего можно применять в конструкциях подкреплений, в которых линия центров тяжести подкрепляющего элемента лежит в срединной поверхности оболочки. Если отверстие закрыто упругой крышкой, можно использовать эту расчетную схему, приняв, что кольцо имеет некоторые приведенные жесткостные характеристики.

Напряженно-деформированное состояние такой оболочки описывается системой дифференциальных уравнений, приведенной в работе [1]. Усилия, моменты и перемещения до второго приближения выражаются формулами

$$N_n = \sum A_{0,i} \frac{1}{r} H'_{0,i} + \frac{p}{r^2} - \frac{qR}{2} + \varepsilon \Big\{ \sum A_{N+1,i} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{r} H'_{N+1,i} - \frac{(N+1)^2}{r^2} H_{N+1,i} \right] + \sum A_{0,i} \left[H''_{0,i} - \frac{1}{r} H'_{0,i} \right] -$$

$$- \frac{(N+1)(N+2)}{r^2} b_{N+1} + \frac{N(N+3)}{r^2} p \Big\} \cos (N+1) \theta,$$

$$N_s = \sum A_{0,i} H''_{0,i} - \frac{p}{r^2} - \frac{qR}{2} + \varepsilon \Big\{ \sum A_{N+1,i} H''_{N+1,i} + \sum A_{0,i} r H'''_{0,i} +$$

$$+ \frac{(N+1)(N+2)}{r^2} b_{N+1} - \frac{N(N+3)}{r^2} p \Big\} \cos (N+1) \theta,$$

$$- RM_n = \sum A_{0,i} \Big\{ \nu H_{0,i} + \frac{1-\nu}{\varkappa^2} [(k_i^2 + d) H''_{0,i} + (-1)^i \lambda_2^2 H''_{0,k}] \Big\} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\varepsilon\Big\{\sum A_{N+1,i}\Big[\nu H_{N+1,i}+\frac{1-\nu}{\varkappa^2}\left((k_i^2+d)\,H''_{N+1,i}+(-1)^i\lambda_2^2H''_{0,k}\right)\Big]+\\
&+\sum A_{0,i}r\Big[\nu H'_{0,i}+\frac{1-\nu}{\varkappa^2}\left[(k_i^2+d)\,H''_{0,i}+(-1)^i\lambda_2^2H'''_{0,i}\right)\Big]+\\
&+R(1-\nu)(N+1)\,C_{N+1}K'_{N+1}(\lambda_3r)+\frac{R^2(N+1)(N+2)}{1+\nu}a_{N+1}\Big\}\cos(N+1)\,\theta,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
-RM_s&=\sum A_{0,i}\Big\{H_{0,i}-\frac{1-\nu}{\varkappa^2}\left[(k_i^2+d)\,H''_{0,i}+(-1)^i\lambda_2^2H''_{0,k}\right]\Big\}+\\
&+\varepsilon\Big\{\sum A_{N+1,i}H_{N+1,i}-\frac{1-\nu}{\varkappa^2}\left[(k_i^2+d)\,H_{N+1,i}+(-1)^i\lambda_2^2H''_{N+1,k}\right]+\\
&+\sum A_{0,i}rH'_{0,i}-\frac{1-\nu}{\varkappa^2}\left[(k_i^2+d)\,H'''_{0,i}+(-1)^i\lambda_2^2H'''_{0,k})\right]-\\
&-R(1-\nu)(N+1)\,C_{N+1}K'_{N+1}(\lambda_3r)-\frac{R^2(N+1)(N+2)}{r^2(1+\nu)}a_{N+1}\Big\}\cos(N+1)\,\theta;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{2E\tau}{1+\nu}U_n&=\sum A_{0,i}H'_{0,i}+\frac{p}{r}+\frac{1-\nu}{2(1+\nu)}qRr+\varepsilon\Big\{\sum A_{N+1,i}H'_{N+1,i}+\\
&+\sum A_{0,i}rH''_{0,i}-\frac{N+1}{r}b_{N+1}+\frac{r}{H^2N(1+\nu)}a_{N+1}+\\
&+\frac{N}{r}p+\frac{1-\nu}{2(1+\nu)}qRr\Big\}\cos(N+1)\,\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D\varkappa^2V_n&=\sum A_{0,i}\left[(k_i^2+d)\,H'_{0,i}+(-1)^i\lambda_2^2H'_{0,k}\right]+\varepsilon\Big\{\sum A_{N+1,i}\left[(k_i^2+d)\,H'_{N+1,i}+\right.\\
&\left.+(-1)^i\lambda_2^2H'_{N+1,k}\right]+\sum A_{0,i}r\left[(k_i^2+d)\,H''_{0,i}+(-1)^i\lambda_2^2H''_{0,k}\right]+\\
&+R\varkappa^2(N+1)\,C_{N+1}K_{N+1}(\lambda_3r)-\frac{R^2\varkappa^2(N+1)}{r}d_{N+1}\Big\}\cos(N+1)\,\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2E\tau}{1+\nu}U_s&=\varepsilon(N+1)\Big\{\sum A_{N+1,i}\frac{1}{r}H_{N+1,i}+\sum A_{0,i}H'_{0,i}+\frac{1}{r}b_{N+1}+\\
&+\frac{r}{H^2N(N+1)(1+\nu)}a_{N+1}+\frac{qRr}{2(1+\nu)}\Big\}\sin(N+1)\,\theta,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2E_\tau}{R}w&=\Sigma A_{0,i}\left[\lambda_1^2H_{0,i}+(-1)^i\lambda_2^2H_{0,k}\right]+\varepsilon\Big\{\Sigma A_{N+1,i}\left[\lambda_1^2H_{N+1,i}+\right.\\
&\left.+(-1)^i\lambda_2^2H_{N+1,k}\right]+\frac{1}{r^N}\Big[\Sigma A_{0,i}\left(\lambda_1^2H'_{0,i}+(-1)^i\lambda_2^2H'_{0,k}\right)+\\
&+\frac{1}{H^2r}d_{N+1}\Big]\Big\}\cos(N+1)\,\theta.
\end{aligned}
$$

Суммирование ведется по $i=1,2$; $k=2$, если $i=1$, и $k=1$, если $i=2$. Здесь введены обозначения:

$$
H_n^{(1)}(\lambda r)=H_{n,1}+iH_{n,2},\quad \frac{d}{dr}H_n^{(1)}(\lambda r)=H'_{n,1}+iH'_{n,2},
$$

$$
\frac{d^2}{dr^2}H_n^{(1)}(\lambda r)=H''_{n,1}+iH''_{n,2},\quad \frac{d^3}{dr^3}H_n^{(1)}(\lambda r)=H'''_{n,1}+iH'''_{n,2},
$$

$$
H'_{n,1}=-\lambda_1H_{n+1,1}+\lambda_2H_{n+1,2}+\frac{n}{r}H_{n,1},
$$

$$
H'_{n,2}=-\lambda_1H_{n+1,2}-\lambda_2H_{n+1,1}+\frac{n}{r}H_{n,2},
$$

$$
\begin{aligned}
H''_{n,1}&=\left[-\lambda_1^2+\frac{n(n-1)}{r^2}\right]H_{n,1}+\lambda_2^2H_{n,2}+\frac{\lambda_1}{r}H_{n+1,1}-\frac{\lambda_2}{r}H_{n+1,2},\\
H''_{n,2}&=\left[-\lambda_1^2+\frac{n(n-1)}{r^2}\right]H_{n,2}-\lambda_2^2H_{n,1}+\frac{\lambda_1}{r}H_{n+1,2}+\frac{\lambda_2}{r}H_{n+1,1},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$\lambda_3^2 = \frac{2G_0}{Bh(1-\nu^2)}, \quad H = h + \frac{\tau}{2}, \quad d = \frac{Bh}{G_0}\varkappa^2,$$

$$\varkappa^2 = \frac{1-\nu^2}{R^2H^2}, \quad k_1 = k_2 = \lambda_1^2, \quad i = \sqrt{-1}\,.$$

Все остальные обозначения совпадают с введенными в работе [1].

Используя данные работ [2, 3], записываем граничные условия для приведенных компонент напряженного состояния трехслойной сферической оболочки в виде

$$N_n m - \tilde{\Theta}_n l = E_1 F\left[\frac{m}{\rho^2}U_n - \frac{l}{\rho^2}w + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U_s}{\partial s}\right] + $$
$$+ B\left[\frac{\partial^4}{\partial s^4}(mU_n) - \frac{\partial^3}{\partial s^3}\frac{U_s}{\rho} - \frac{\partial^4}{\partial s^4}(lw)\right],$$

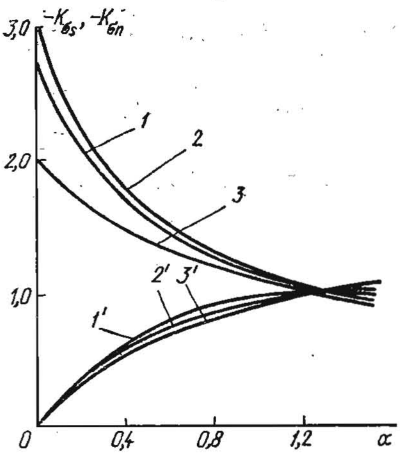

Рис. 1

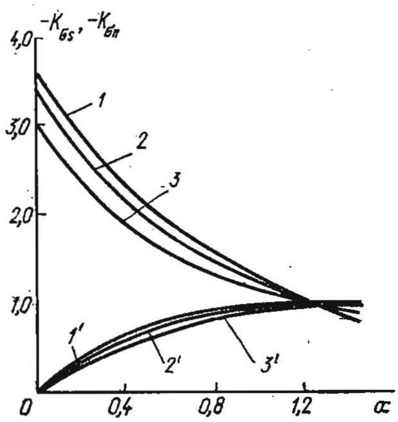

Рис. 2

$$N_{ns} = -EF\left[\frac{\partial}{\partial s}\frac{mU_n}{\rho} - \frac{\partial}{\partial s}\frac{lw}{\rho} + \frac{\partial^2 U_s}{\partial s^2}\right] + \frac{B}{\rho}\left[\frac{\partial^3}{\partial s^3}(mU_n - lw) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{U_s}{\rho}\right)\right],$$

$$M_n = -\frac{A}{\rho}\left[-\frac{\partial}{\partial s^2}(lU_n + mw) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{1}{\rho}\frac{U_n}{R}\right] + \qquad (3)$$
$$+ C\left[\frac{\partial^3 w}{\partial s^2 \partial n} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial mw}{\partial s}\right)\right],$$

$$N_n l + \tilde{\Theta}_n m = C\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial n} - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial mw}{\partial s}\right)\right)\right] + $$
$$+ A\left[\frac{\partial^4}{\partial s^4}(lU_n + mw) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial n}\right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{U_n}{R}\right)\right] + Q^0.$$

Подставив выражения для усилий, моментов и перемещений в форме (1) в граничные условия (3), получим систему алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования. Нулевое приближение компонентов напряженного состояния и система алгебраических уравнений в нулевом приближении дают решение задачи о подкреплении кругового отверстия: при $N = 1$ и $\varepsilon = (a - b)/(a + b)$ — эллиптического, при $N = 2$ и $\varepsilon = \pm 1/4$ — треугольного, а при $N = 3$ и $\varepsilon = \pm 1/9$ — квадратного отверстий.

В качестве примера рассмотрим оболочку с параметрами $R = 100$ см, $r_0 = 10$ см, $2h = 2$ см, $\tau = 0{,}2$ см. Оболочка ослаблена подкрепленным эллиптическим отверстием, в котором $r_0 = (a + b)/2$.

На рис. 1, 2 приведены кривые зависимости коэффициентов концентрации окружных (*1*, *2*, *3*) и радиальных (*1'*, *2'*, *3'*) напряжений от жесткости характеристик кольца, подкрепляющего круговое (рис. 1) и эллиптическое (рис. 2) отверстия.

Отношение модуля упругости несущих слоев к модулю сдвига заполнителя равно 10^3, $a/b = 1,3$. Кривым *1, 2, 3* и *1', 2', 3'* соответствуют значения $A = 10^{-4}$; 10^{-2}; 1,0. Жесткостные характеристики определяются по формулам

$$C = \frac{1{,}134}{1+\nu} A', \quad \alpha = \frac{E_1 F}{2E\tau r_0}, \quad A' = \frac{E_1 I_x}{2E\tau r_0^3}, \quad B = \frac{E_1 I_y}{2E\tau r_0^3}.$$

Сравнивая результаты, можно сделать такой вывод: при расчетах на прочность конструкций, элементами которых являются трехслойные оболочки с круговыми или эллиптическими вырезами, в случае свободных контуров необходимо учитывать значение коэффициента концентрации окружных напряжений, а в случае подкрепления контуров кольцами большой жесткости — значение коэффициента концентрации радиальных напряжений. Подбором кольца с жесткостной характеристикой $\alpha = 1{,}2$ можно достигнуть равнонапряженного состояния оболочки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ван Фо Фы Г. А., Жалило А. И.* Равновесие трехслойных сферических оболочек с овальным вырезом.— В кн.: Расчеты и конструирование изделий из стеклопластиков. Киев : Наук. думка, 1972, с. 63—80.
2. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Шнеренко К. И.* Сферические днища, ослабленные отверстиями.— Киев : Наук. думка, 1970.— 322 с.
3. *Савин Г. Н., Флейшман Н. П.* Пластинки и оболочки с ребрами жесткости.— Киев : Наук. думка, 1964.— 384 с.

Институт механики АН УССР

Поступила в редколлегию 20.02.78

УДК 517.946 : 539.31

М. П. Ленюк, Л. К. Шеляг

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ПОЛОГО СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Рассмотрим упругое изотропное полое однородное симметричное тело протяженности $[R_1, R_2]$, имеющее при $t < 0$ всюду нулевую температуру, а при $t > 0$ на поверхностях $r = R_k$ ($k = 1, 2$) осуществляется теплообмен по обобщенному закону Ньютона со средой, температура которой на поверхностях $r = R_k$ равна $T_k(t)$ ($k = 1, 2$). Пусть а) $T_k(t)$ — стационарные в широком смысле функции времени [5], причем реализации функций $T_k(t)$ выходят из нуля, т. е. $T_k(0) = 0$ с вероятностью единица; б) поверхности тела свободные от радиальных напряжений; в) в теле равномерно распределены тепловые источники, интенсивность которых также является случайной функцией времени.

Случайное температурное поле в рассматриваемом теле описывает функция $T(r, t)$, являющаяся решением задачи [3]

$$b_0^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + b_1^2 \frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2\alpha + 1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) = f(r, t),$$

$$T|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \tag{1}$$

$$B_k T|_{r=R_k} = \left(h_{k1} \frac{\partial}{\partial r} + h_{k2} \frac{\partial}{\partial t} + h_{k3} \right) T_k|_{r=R_k} = \varphi_k(t), \qquad k = 1, 2.$$