

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1974.— 831 с.
2. Коляно Ю. М., Грицко Е. Г. Узкозонный нагрев тел.— ФХОМ, 1977, № 3, с. 149—152.
3. Коляно Ю. М., Грицко Е. Г. Температурное поле в массивных телах при смешанных граничных условиях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 2, с. 132—136.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегия 13.03.78

УДК 539.377

Ю. М. Коляно, П. Т. Муравецкий

НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ДВИЖУЩИМСЯ ВГЛУБЬ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Рассмотрим полубесконечную пластинку $x \geq 0$, которая нагревается движущимся в направлении оси Ox призматическим источником тепла мощностью q_0 . В этом случае для определения нестационарного температурного поля в пластинке имеем уравнение теплопроводности

$$\Delta T - \kappa^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q_0}{\lambda} N(x - v\tau, y) S_+(\tau), \quad (1)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\kappa^2 = \frac{\alpha}{\lambda \delta}$; α, λ, a — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $z = \pm \delta$, теплопроводности, температуропроводности; τ — время; $S_+(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0, & \zeta \leq 0; \end{cases}$

$$N(x - v\tau, y) = [S_-(x - v\tau) - S_+(x - v\tau - b)] [S_-(y + d) - S_+(y - d)];$$

$S_-(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \geq 0, \\ 0, & \zeta < 0; \end{cases}$ v — скорость движения источника тепла. Если размеры b и $2d$ источника тепла малы по сравнению с его длиной 2δ , вместо уравнения теплопроводности (1) получаем уравнение

$$\Delta T - \kappa^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q}{2\lambda\delta} \delta_+(x - v\tau) \delta(y) S_+(\tau), \quad (2)$$

где

$$\frac{q}{2\delta} \delta_+(x - v\tau) \delta(y) = q_0 \lim_{\substack{b \rightarrow 0, \\ d \rightarrow 0}} N(x - v\tau, y);$$

$$q = q_0 V; \quad V = 4\delta b d.$$

Когда начальная температура пластинки равна нулю, поверхность $x = 0$ теплоизолирована, на бесконечности температура и ее производная по x исчезают, то после применения к уравнению (2) косинус-преобразования Фурье по x и Лапласа по τ получаем

$$\frac{d^2 \hat{T}}{dy^2} - \gamma^2 \hat{T} = -4Q \hat{\delta}_+ \delta(y), \quad (3)$$

где

$$\hat{T} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dx \int_0^\infty T \cos \xi x e^{-s\tau} dx d\tau; \quad \gamma = \sqrt{\xi^2 + \kappa^2 + \frac{s}{a}}; \quad Q = \frac{q}{8\pi\lambda\delta}.$$

Решение уравнения (3) с учетом граничного условия $\hat{T}|_{|y| \rightarrow \infty} = 0$ имеет вид

$$\hat{T} = 2Q \hat{\delta}_+ \frac{e^{-\gamma|y|}}{\gamma}. \quad (4)$$

Осуществляя здесь переход к оригиналу с учетом теорем о свертке для преобразования Лапласа и косинус-преобразования Фурье, приходим к такому выражению температурного поля в рассматриваемой пластинке:

$$T = Q \int_0^{\tau} \left[e^{-\frac{(x^+ - v\zeta)^2}{4a\zeta}} + e^{-\frac{(x^- + v\zeta)^2}{4a\zeta}} \right] e^{-\frac{y^2}{4a\zeta} - \kappa^2 a \zeta} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (5)$$

где $x^{\pm} = x \pm v\tau$.

Вызываемые температурным полем (5) квазистатические температурные напряжения определим по формулам

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (6)$$

где $F = U - 2G\Psi$; U — бигармоническая функция, т. е.

$$\Delta \Delta U = 0; \quad (7)$$

Ψ — термоупругий потенциал перемещений, являющийся частным решением уравнения

$$\Delta \Psi = \alpha_t (1 + \nu) T. \quad (8)$$

Применяя к уравнению (2) преобразование Лапласа по τ , находим

$$\tilde{T} = \gamma_0^{-2} [\Delta \tilde{T} + 4\pi Q \tilde{\delta}_+ \delta(y)]. \quad (9)$$

Здесь

$$\gamma_0 = \sqrt{\kappa^2 + \frac{s}{a}}, \quad \tilde{\delta}_+ = \int_0^{\infty} \delta_+(x - v\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Подставляя равенство (9) в преобразованное по Лапласу уравнение (8), приходим к уравнению

$$\Delta \tilde{\Phi} = 4\alpha_t (1 + \nu) \pi Q \gamma_0^{-2} \delta(y) \tilde{\delta}_+, \quad (10)$$

где $\tilde{\Phi} = \tilde{\Psi} - \alpha_t (1 + \nu) \gamma_0^{-2} \tilde{T}$.

Применив к уравнению (10) преобразование Фурье по y , получим

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}}{dx^2} - \eta^2 \tilde{\Phi} = \frac{m}{\gamma_0^2} \tilde{\delta}_+, \quad (11)$$

где $m = 2\sqrt{2\pi} \alpha_t (1 + \nu) Q$. Частное решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{\Phi} = -\frac{m}{2|\eta|} \gamma_0^{-2} \int_0^{\infty} e^{-|\eta||x - v\tau| + -s\tau} d\tau. \quad (12)$$

Осуществляя здесь переход от изображения Лапласа к оригиналу, находим такое выражение трансформанты Фурье термоупругого потенциала перемещений:

$$\bar{\Psi} = \alpha \alpha_t (1 + \nu) \int_0^{\tau} e^{-\kappa^2 a(\tau - \zeta)} \bar{T}(x, \eta, \zeta) d\zeta - \frac{ma}{2|\eta|} \int_0^{\tau} e^{-\kappa^2 a(\tau - \zeta) - |\eta||x - v\zeta| + d\zeta}. \quad (13)$$

Решение трансформированного по Фурье уравнения (7) записывается в виде

$$\bar{U} = (A + Bx) e^{-|\eta|x} + (C + Dx) e^{|\eta|x}. \quad (14)$$

Применив к формулам (6) преобразование Фурье по y , получим

$$\bar{\sigma}_{xx} = -\eta^2 \bar{F}, \quad \bar{\sigma}_{xy} = i\eta \frac{d\bar{F}}{dx}, \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{d^2 \bar{F}}{dx^2}, \quad (15)$$

где $\bar{F} = \bar{U} - 2G\bar{\Psi}$. Учитывая граничные условия

$$\bar{\sigma}_{xx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \bar{\sigma}_{xy} \Big|_{x=0} = 0, \quad (16)$$

находим постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} A &= \alpha_i E a \int_0^\tau e^{-\kappa^2 a(\tau-\zeta)} \left[\bar{T}(0, \eta, \zeta) - V\sqrt{2\pi} \frac{Q}{|\eta|} e^{-|\eta|v\zeta} \right] d\zeta, \\ B &= \alpha_i E a \int_0^\tau e^{-\kappa^2 a(\tau-\zeta)} [|\eta| \bar{T}(0, \eta, \zeta) - 2V\sqrt{2\pi} Q e^{-|\eta|v\zeta}] d\zeta, \\ C &= 0, \quad D = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Следовательно, трансформанты Фурье температурных напряжений записываются в виде

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= -\eta^2 a \alpha_i E \int_0^\tau e^{-\kappa^2 a(\tau-\zeta)} \left\{ (1+x|\eta|) e^{-x|\eta|} \bar{T}(0, \eta, \zeta) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{V\sqrt{2\pi}}{|\eta|} Q [(1+2|\eta|x) e^{-|\eta|(x+v\zeta)} - e^{-|\eta||x-v\zeta|}] - \bar{T}(x, \eta, \zeta) \right\} d\zeta, \\ \bar{\sigma}_{xy} &= -i\eta a \alpha_i E \int_0^\tau e^{-\kappa^2 a(\tau-\zeta)} \left\{ x\eta^2 e^{-|\eta|x} \bar{T}(0, \eta, \zeta) + \right. \\ &\quad \left. + QV\sqrt{2\pi} [e^{-|\eta|(x+v\zeta)} (1-2|\eta|x) + e^{-|\eta||x-v\zeta|} \operatorname{sgn}_+(x-v\zeta)] + \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right\} d\zeta, \quad (18) \\ \bar{\sigma}_{yy} &= -\bar{\sigma}_{xx} - \alpha_i E \bar{T} + 2|\eta| a \alpha_i E \int_0^\tau e^{-\kappa^2 a(\tau-\zeta)} [2QV\sqrt{2\pi} e^{-|\eta|(x+v\zeta)} - \\ &\quad - |\eta| e^{-|\eta|x} \bar{T}(0, \eta, \zeta)] d\zeta. \end{aligned}$$

Применив к равенству (4) преобразование Фурье, получим фигурирующее в (18) выражение трансформанты Фурье температурного поля:

$$\bar{T}(x, \eta, \tau) = QV\sqrt{2a} \int_0^\tau \left\{ e^{-\frac{[x+v(\tau-\beta)]^2}{4a\beta}} + e^{-\frac{[x-v(\tau-\beta)]^2}{4a\beta}} \right\} e^{-(\eta^2+\kappa^2)a\beta} \frac{d\beta}{V\beta}. \quad (19)$$

На поверхности $x = 0$ пластинки это выражение принимает вид

$$\bar{T}(0, \eta, \tau) = 2QV\sqrt{2a} \int_0^\tau e^{-\frac{v^2(\tau-\beta)^2}{4a\beta} - (\eta^2+\kappa^2)a\beta} \frac{d\beta}{V\beta}. \quad (20)$$

Осуществим в выражениях (18) переход к оригиналам. В результате искомые температурные напряжения в пластинке получим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -2Qa\alpha_i E \int_0^\tau e^{-\kappa^2 a(\tau-\zeta)} \left\langle 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^\zeta e^{-\frac{v^2(\zeta-\beta)^2}{4a\beta} - \kappa^2 a\beta} [M_3^+(x, |y|, \beta) + \right. \\ &\quad \left. + xM_4^+(x, |y|, \beta)] \frac{d\beta}{V\beta} - \frac{1}{8a^{3/2}} \int_0^\zeta \left\{ e^{-\frac{[x+v(\zeta-\beta)]^2}{4a\beta}} + e^{-\frac{[x-v(\zeta-\beta)]^2}{4a\beta}} \right\} e^{-\kappa^2 a\beta} \frac{y^2}{4a\beta} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2a\beta - y^2}{\beta^3} d\beta - N_2^c(x+v\zeta, y) - 2xN_3^c(x+v\zeta, y) + N_2^c(|x-v\zeta|, y) \right\rangle \\ \sigma_{xy} &= -2Qa\alpha_i E \int_0^\tau e^{-\kappa^2 a(\tau-\zeta)} \left\langle 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} x \int_0^\zeta e^{-\frac{v^2(\zeta-\beta)^2}{4a\beta} - \kappa^2 a\beta} i \operatorname{sgn}_+ y \times \right. \\ &\quad \left. \times M_4^-(x, |y|, \beta) + N_2^s(x+v\zeta, y) - 2xN_3^s(x+v\zeta, y) + \operatorname{sgn}_-(x-v\zeta) \right\rangle \end{aligned}$$

$$\times N_2^s(|x - v\zeta|_+, y) - \frac{1}{16a^{7/2}} \int_0^\zeta \left\{ e^{-\frac{[x+v(\zeta-\beta)]^2}{4a\beta}} |x + v(\zeta - \beta)| + \right. \\ \left. + e^{-\frac{[x-v(\zeta-\beta)]^2}{4a\beta}} |x - v(\zeta - \beta)| \right\} \frac{2a\beta - y^2}{\beta^4} d\beta \Bigg\} d\zeta, \quad (21)$$

$$\sigma_{yy} = -\sigma_{xx} - \alpha_t ET - 8Q\alpha_t E \int_0^\tau e^{-\kappa^2 a(\tau-\zeta)} \left\{ \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^\zeta e^{-\frac{v^2(\zeta-\beta)^2}{4a\beta} - \kappa^2 a\beta} \times \right. \\ \left. \times M_3^+(x, |y|, \beta) \frac{d\beta}{\sqrt{\beta}} - N_2^s(x + v\zeta, y) \right\} d\zeta,$$

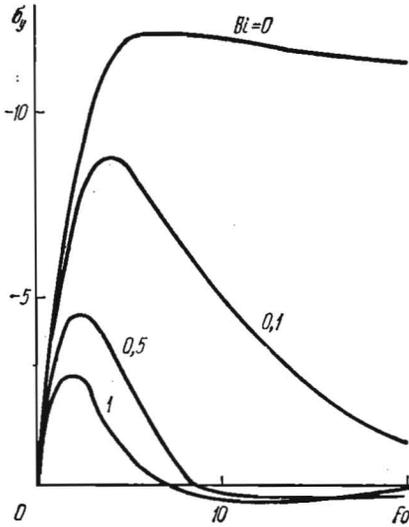


Рис. 1

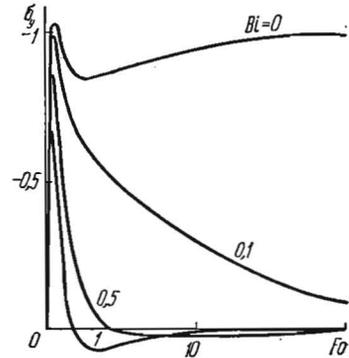


Рис. 2

где

$$N_n^s(x + v\zeta, y) = \frac{\Gamma(n)}{[y^2 + (x + v\zeta)^2]^{n/2}} \cos\left(n \arctg \frac{y}{x + v\zeta}\right),$$

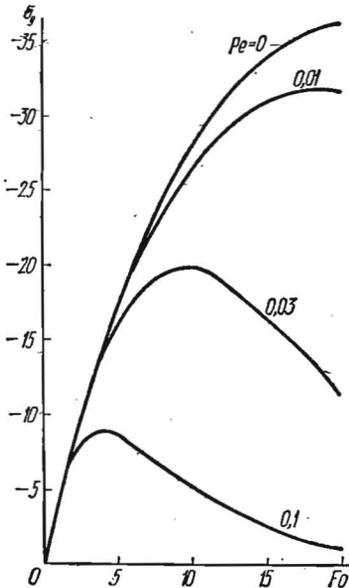


Рис. 3

$$M_n^\pm(x, |y|, \beta) =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x^2 - y^2}{8a\beta}}}{2(2a\beta)^{n/2}} \Gamma(n) \left[e^{\frac{i|y|x}{4a\beta}} D_{-n}\left(\frac{x + i|y|}{\sqrt{2a\beta}}\right) \pm \right. \\ \left. \pm e^{-\frac{i|y|x}{4a\beta}} D_{-n}\left(\frac{x - i|y|}{\sqrt{2a\beta}}\right) \right]; \quad (22)$$

$D_{-n}(\zeta)$ — функции параболического цилиндра; выражение для $N_n^s(x + v\zeta, y)$ получим, заменив в выражении (22) \cos на \sin .

На краевой поверхности

$$\sigma_{xx}|_{x=0} = 0, \quad \sigma_{xy}|_{x=0} = 0,$$

$$\sigma_{yy}|_{x=0} = -\alpha_t ET|_{x=0} + 2a\alpha_t EQ \int_0^\tau e^{-\kappa^2 a(\tau-\zeta)} \times$$

$$\times \left\{ \frac{4(\zeta^2 v^2 - y^2)}{(\zeta^2 v^2 + y^2)^2} - \frac{1}{a} \int_0^\zeta \left[e^{-\frac{v^2(\zeta-\beta)^2 + y^2}{4a\beta} - \kappa^2 a\beta} \left(1 - \frac{y^2}{2a\beta}\right) \right] \frac{d\beta}{\beta^2} \right\} d\zeta. \quad (23)$$

При $v = 0$ это выражение совпадает с выражением, полученным* из решения задачи для полубесконечной пластинки, нагреваемой движущимся параллельно краевой поверхности линейным источником тепла.

Вводя безразмерные величины $Pe = \frac{v\delta}{2a}$, $Y = \frac{y}{\delta}$, $Fo = \frac{\alpha\tau}{\delta^2}$, $Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda}$, $f = \frac{a^r}{\delta^2}$, $\varphi = \frac{a\beta}{\delta^2}$, формулу (23) переписываем в виде

$$\sigma_y = \frac{\sigma_{yy}}{2\alpha_t E Q} = - \int_0^{Fo} e^{-\frac{Pe^2(Fo-f)^2+Y^2}{f}} Bi f \frac{df}{f} + \int_0^{Fo} e^{-Bi(Fo-f)} \times \\ \times \left[4 \frac{4f^2 Pe^2 - Y^2}{(4f^2 Pe^2 + Y^2)^2} - \int_0^f e^{-\frac{Pe^2(f-\varphi)^2+Y^2}{\varphi}} Bi \varphi \left(1 - \frac{Y^2}{2\varphi} \right) \frac{d\varphi}{\varphi^2} \right] df. \quad (24)$$

По этой формуле при $Y = 1$ произведены расчеты неустановившихся температурных напряжений в зависимости от теплоотдачи с боковых поверхностей пластинки, которые представлены в виде графиков на рис. 1 (для $Pe = 0,1$) и 2 (для $Pe = 1$). Графики изменения этих напряжений в зависимости от скорости движения источников тепла при $Y = 1$, $Bi = 0,1$ представлены на рис. 3. Из графиков видно, что с ростом теплоотдачи и скорости движения источника тепла напряжения уменьшаются.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
14.03.78

УДК 539.3

Б. В. Гера

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕРМОУПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ

В настоящей работе даны постановка и решение задачи определения режима силового нагружения и температурного поля оболочки, при которых обеспечивается близость динамического напряженного состояния к квазистатическому и одновременно его оптимизация.

Запишем исходную систему уравнений и условий для термоупругой оболочки постоянной толщины $2h$, ограниченной координатными поверхностями $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \beta_1$, $\beta = \beta_2$. Уравнения движения оболочки принимаем в виде [5, 6]

$$\begin{aligned} L_1(\vec{N}, \vec{M}) - \rho_1 \ddot{u} - \rho_2 k_1 \ddot{\vartheta}_1 &= -q_1, \\ L_2(\vec{N}, \vec{M}) - \rho_1 \ddot{v} - \rho_2 k_2 \ddot{\vartheta}_2 &= -q_2, \\ L_3(\vec{N}, \vec{M}) - \rho_1 \ddot{w} - \frac{\rho_2}{AB} \left(\frac{\partial B \ddot{\vartheta}_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial A \ddot{\vartheta}_2}{\partial \beta} \right) &= -q_n, \end{aligned} \quad (1)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} L_1(\vec{N}, \vec{M}) &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial BN_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_2 + \frac{\partial AS_{12}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S_{12} + \right. \\ &\quad \left. + k_1 \left(\frac{\partial BM_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 + 2 \frac{\partial AH_{12}}{\partial \beta} + 2 \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial A}{\partial \beta} H_{12} \right) \right], \\ L_2(\vec{N}, \vec{M}) &= \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial AN_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_1 + \frac{\partial BS_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S_{12} + \right. \end{aligned}$$

* Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык В. И., Лозбень В. Л. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи. — Киев: Наук. думка, 1977. — 158 с.