21. *Ричардсон М. К.* Суперпозиция напряжений в полуплоскости, содержащей упругий диск из того же материала.— Прикл. механика, 1969, **63Е**, № 1, с. 136—138.
22. *Росс А. Л.* Аналогия термоупругости с задачами о жестко заделанной пластинке.— Теорет. основы инж. расчетов, 1963, **85Д**, № 4, с. 121—126.
23. *Соколовский В. В.* Теория пластичности.— М. : Высш. школа, 1969.— 608 с.
24. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости.— М. : Наука, 1975.— 575 с.
25. *Тимошенко С. П.* Пластинки и оболочки.— М. : Гостехиздат, 1963.— 635 с.
26. *Чернышев Г. Н.* О действии сосредоточенных сил и моментов на упругую тонкую оболочку произвольного очертания.— Прикл. математика и механика, 1963, **24**, № 1, с. 36—41.
27. *Cranz H.* Die experimentelle Bestimmung der Airyschen Spannungs — funktion mit Hilfe des Plattengleichuisses.— Ing.-Arch., 1939, **10**, N 10, S. 159—166.
28. *Goodier J. N.* On the integration of the thermoelastic equation. —Phil. Mag.,1937, **11**, N 29, p. 1017—1027.
29. *Jensen V. P.* Experimental determination of non-linear distribution of stresses by the slab analogy with application to Hoover Dam.— Univ. Ill., 1931.— 36 p.
30. *Mindlin R. D.* The analogy between multiply-connected slices and slabs.— Quart. Appl. Math., 1946, **4**, N 3, p. 219—286.
31. *Mindlin R. D., Salvadori M. G.* Analogies.— In: Handbook of experimental stress analysis/Ed. by M. Hetenyi. New York : Wiley, 1950, p. 775—789.
32. *Ross A. L.* Thermal stress analysis of finite sections: ANPD — APEX 480.— Washington : Office techn. serv. Dep. commer., 1959.— 26 p.
33. *Seinosuke Sumi, Eiichi Matsumoto, Tsuyoushi Sekiya.* Mechanical analog procedure for solution of plane thermoelastic problems.— In.: Proc. 14th Jap. Nat. Congr. Appl. Mech. Tokyo, 1965, p. 9—19.
34. *Slab* analogy experiments. Stress studies for Boulder Dam.— In: Boulder Canyon project, pt 5, bull. 2, 4. New York : U. S. Dep. Int. final reports, Bureau of Reclamation, 1938, 135 p.
35. *Southwell R. V.* On the analogies relating flexure and extension on flat plates.— Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, **3**, pt 3, p. 257—261.
36. *Timpe A.* Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelest mit Hilfe der Airyschen Funktion.— Z. Math. Phys., 1905, **52**, S. 348—383.
37. *Tremmel E.* Über die Anwendung der Plattentheorie zur Bestimmung von Wärmespannungsfeldern. Osters.— Ing.-Arch., 1957, **11**, N 3, S. 165—172.
38. *Westergaard H. M.* Graphostatics of stress functions.— Trans. ASME, 1934, **56**, N 3, p. 141—150.
39. *Wieghardt K.* Über ein neues Verfahren, Verwickelte Spannungsverteilungen in elastischen Körpern auf experimentellen Wege zu finden.— Mitt. Forsch. aus dem Gebiete des Ingenieurwissens, 1908, H. 49, S. 15—30.
40. *Zienkiewicz O. C., Crus C.* The use of the slab analogy in the determination of thermal stresses. — Int. J. Mech. Sci., 1962, **4**, Jul.— Aug., p. 285—296.

г. Москва

Поступила в редколлегию
20.02.78

УДК 536.12 ÷ 539.376

Ю. М. Коляно, А. Я. Недосека, Е. Г. Грицько

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В СЛОЕ ПРИ СМЕШАННЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Рассмотрим слой толщиной $2l$, на части $r \leqslant R_0$ поверхности $z = l$ которого задан постоянный тепловой поток q, а через остальную часть этой поверхности и через поверхность $z = -l$ осуществляется теплообмен с внешней средой нулевой температуры по закону Ньютона, причем по кольцевых зонах $R_1 \leqslant r \leqslant R_4$ поверхности $z = l$ и $R_2 \leqslant r \leqslant R_3$ поверхности $z = -l$ охлаждение увеличено путем увеличения коэффициента теплоотдачи с этих областей. Для определения возникающего при этом установившегося температурного поля имеем уравнение теплопроводности

$$\Delta t = 0 \qquad (1)$$

и граничные условия

$$\frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{\alpha_1}{\lambda} t + \left(\frac{\alpha_1}{\lambda} t + \frac{q}{\lambda}\right) N(r,\ r - R_0) -$$

$$-\left(\frac{\alpha_4}{\lambda}-\frac{\alpha_1}{\lambda}\right) tN(r-R_1,\ r-R_4) \text{ при } z=l, \quad (2)$$

$$\frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\alpha_3}{\lambda} t+\left(\frac{\alpha_2}{\lambda}-\frac{\alpha_3}{\lambda}\right) tN(r-R_2,\ r-R_3) \text{ при } z=-l;\ rt\,|_{\substack{r\to\infty\\ r=0}}=0, \quad (3)$$

где $\Delta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$; λ — коэффициент теплопроводности; α_4 — коэффициент теплоотдачи с области $R_1\leqslant r\leqslant R_4$ поверхности $z=l$; α_1 — коэффициент теплоотдачи с этой поверхности за пределами областей $r\leqslant R_0$ и $R_1\leqslant r\leqslant R_4$; α_2 — коэффициент теплоотдачи с области $R_2\leqslant r\leqslant R_3$ поверхности $z=-l$; α_3 — коэффициент теплоотдачи с этой поверхности вне зоны $R_2\leqslant r\leqslant R_3$; $N(a,b)=S_-(a)-S_+(b)$; $S_\pm(\zeta)$ — асимметричные единичные функции [1]; z, r — цилиндрические координаты.

Применив к уравнениям (1) — (3) интегральное преобразование Ханкеля по переменной r, получим

$$\frac{d^2\bar t}{dz^2}-\xi^2\bar t=0, \quad (4)$$

$$\frac{d\bar t}{dz}+\frac{\alpha_1}{\lambda}\bar t=\frac{q}{\lambda}\frac{R_0J_1(\xi R_0)}{\xi}+\frac{\alpha_1}{\lambda}\int_0^{R_0} t(r,\ l)\,rJ_0(r\xi)\,dr-$$

$$-\left(\frac{\alpha_4}{\lambda}-\frac{\alpha_1}{\lambda}\right)\int_{R_1}^{R_4} t(r,\ z)\,rJ_0(r\xi)\,dr \text{ при } z=l, \quad (5)$$

$$\frac{d\bar t}{dz}-\frac{\alpha_3}{\lambda}\bar t=\left(\frac{\alpha_2}{\lambda}-\frac{\alpha_3}{\lambda}\right)\int_{R_2}^{R_3} t(r,\ z)\,rJ_0(r\xi)\,dr \text{ при } z=-l. \quad (6)$$

Если размеры областей $r\leqslant R_0$, $R_1\leqslant r\leqslant R_4$ поверхности $z=l$ и области $R_2\leqslant r\leqslant R_3$ поверхности $z=-l$ малы по сравнению с толщиной слоя, то значение температуры на этих областях с достаточной степенью точности можно заменить соответственно их интегральными характеристиками [2, 3]

$$\vartheta_0=\frac{2}{R_0^2}\int_0^{R_0} rt(r,\ l)\,dr,\quad \vartheta_1=\frac{2}{R_4^2-R_1^2}\int_{R_1}^{R_4} rt(r,\ l)\,dr,$$

$$\vartheta_2=\frac{2}{R_3^2-R_2^2}\int_{R_2}^{R_3} rt(r,\ -l)\,dr. \quad (7)$$

Заменив t в подынтегральных выражениях уравнений (5), (6) соответственно на ϑ_0, ϑ_1 и ϑ_2, получим

$$\frac{d\bar t}{dz}+\frac{\alpha_1}{\lambda}\bar t=\left(\frac{q}{\lambda}+\frac{\alpha_1}{\lambda}\vartheta_0\right)f_1-\vartheta_1\left(\frac{\alpha_4}{\lambda}-\frac{\alpha_1}{\lambda}\right)f_2 \text{ при } z=l,$$

$$\frac{d\bar t}{dz}-\frac{\alpha_3}{\lambda}\bar t=\vartheta_2\left(\frac{\alpha_2}{\lambda}-\frac{\alpha_3}{\lambda}\right)f_3 \text{ при } z=-l, \quad (8)$$

где

$$f_1=\frac{R_0J_1(\xi R_0)}{\xi};\quad f_2=\frac{R_4J_1(\xi R_4)-R_1J_1(\xi R_1)}{\xi};$$

$$f_3=\frac{R_3J_1(\xi R_3)-R_2J_1(\xi R_2)}{\xi}.$$

Решая краевую задачу (4), (8) и переходя в найденном решении к оригиналу, находим

$$t(r,\ z)=\int_0^\infty\left[\left(\frac{q}{\lambda}+\frac{\alpha_1}{\lambda}\vartheta_0\right)\varphi_1(\xi,\ z)-\left(\frac{\alpha_4}{\lambda}-\frac{\alpha_1}{\lambda}\right)\vartheta_1\varphi_2(\xi,\ z)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\alpha_2}{\lambda}-\frac{\alpha_3}{\lambda}\right)\vartheta_2\varphi_3(\xi,\ z)\right]\xi J_0(r\xi)\,d\xi. \quad (9)$$

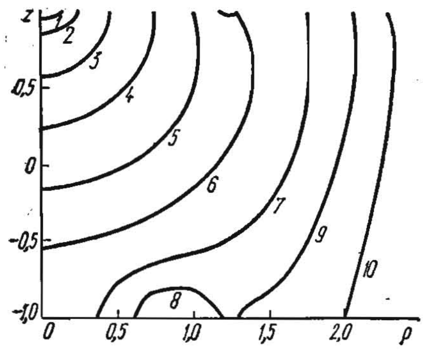
Здесь

$$\varphi_1(\xi,\ z) = f_1\left[\left(\frac{\alpha_3}{\lambda} - \xi\right) e^{-\xi(z+l)} - \left(\frac{\alpha_3}{\lambda} + \xi\right) e^{\xi(z+l)}\right]/D,$$

$$\varphi_2(\xi,\ z) = f_2\varphi_1(\xi,\ z)/f_1,$$

$$\varphi_3(\xi,\ z) = f_3\left[\left(\frac{\alpha_1}{\lambda} - \xi\right) e^{\xi(z-l)} - \left(\frac{\alpha_1}{\lambda} + \xi\right) e^{-\xi(z-l)}\right]/D,$$

$$D = e^{-2\xi l}(\alpha_1/\lambda - \xi)(\lambda_3/\lambda - \xi) - e^{2\xi l}(\alpha_3/\lambda + \xi)(\alpha_1/\lambda + \xi).$$



Подставляя (9) в формулы (7), для определения интегральных характеристик ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2 получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} d_{11}\vartheta_0 + d_{12}\vartheta_1 + d_{13}\vartheta_2 &= \omega_1, \\ d_{21}\vartheta_0 + d_{22}\vartheta_1 + d_{23}\vartheta_2 &= \omega_2, \\ d_{31}\vartheta_0 + d_{32}\vartheta_1 + d_{33}\vartheta_2 &= \omega_3, \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$d_{11} = 1 - \frac{2\alpha_1}{R_0^2\lambda}\int_0^\infty \varphi_1(\xi,\ l)\, f_1\xi d\xi;$$

$$d_{12} = -\frac{2(\alpha_4 - \alpha_1)}{R_0^2\lambda}\int_0^\infty \varphi_2(\xi,\ l)\,\xi f_1 d\xi;$$

$$d_{13} = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_3)}{R_0^2\lambda}\int_0^\infty \varphi_3(\xi,\ l)\,\xi f_1 d\xi; \quad d_{21} = -\frac{2\alpha_1/\lambda}{R_4^2 - R_1^2}\int_0^\infty \varphi_1(\xi,\ l)\,\xi f_2 d\xi;$$

$$d_{22} = 1 + \frac{2(\alpha_4 - \alpha_1)}{(R_4^2 - R_1^2)\lambda}\int_0^\infty \varphi_2(\xi,\ l)\,\xi f_2 d\xi; \quad d_{23} = \frac{2(\alpha_2 - \alpha_3)}{(R_4^2 - R_1^2)\lambda}\int_0^\infty \varphi_3(\xi,\ l)\,\xi f_2 d\xi;$$

$$d_{31} = -\frac{2\alpha_1/\lambda}{R_3^2 - R_2^2}\int_0^\infty \varphi_1(\xi,\ -l)\,\xi f_3 d\xi; \quad d_{32} = \frac{2(\alpha_4 - \alpha_1)}{(R_3^2 - R_2^2)\lambda}\int_0^\infty \varphi_2(\xi,\ -l)\,\xi f_3 d\xi;$$

$$d_{33} = 1 + \frac{2(\alpha_2 - \alpha_3)}{(R_3^2 - R_2^2)\lambda}\int_0^\infty \varphi_3(\xi,\ -l)\,\xi f_3 d\xi; \quad \omega_1 = \frac{2q/\lambda}{R_0^2}\int_0^\infty \varphi_1(\xi,\ l)\,\xi f_1 d\xi;$$

$$\omega_2 = \frac{2q/\lambda}{R_4^2 - R_1^2}\int_0^\infty \varphi_1(\xi,\ l)\,\xi f_2 d\xi; \quad \omega_3 = \frac{2q/\lambda}{R_3^2 - R_2^2}\int_0^\infty \varphi_1(\xi,\ -l)\,\xi f_3 d\xi.$$

Решая систему (10) и подставляя найденные значения интегральных характеристик в (9), получаем формулу для определения температурного поля в слое. Заменив в (9), (10) t, z, r, q/λ, l, ξ, R_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$, α_k/λ $(k = 1, 2, 3, 4)$, ϑ_n $(n = 0, 1, 2)$ соответственно на $\Theta = \frac{t\lambda}{ql}$, $Z = \frac{z}{l}$, $\rho = \frac{r}{l}$, 1, 1, $\eta = \xi l$, $\rho_i = \frac{R_i}{l}$, $\mathrm{Bi}_k = \frac{\alpha_k l}{\lambda}$, $T_n = \frac{\vartheta_n\lambda}{ql}$, запишем решение задачи в безразмерном виде.

На рисунке представлены графики изотерм температурного поля Θ в слое, рассчитанные при $\rho_0 = 0{,}2$; $\rho_1 = 1$; $\rho_2 = 0{,}7$; $\rho_3 = 1$; $\rho_4 = 1{,}3$; $\mathrm{Bi}_1 = 0{,}003$, $\mathrm{Bi}_2 = 0{,}891$, $\mathrm{Bi}_3 = 0{,}003$, $\mathrm{Bi}_4 = 0{,}232$, причем изотерма *1* соответствует температуре 0,17; *2* — 0,11; *3* — 0,05; *4* — 0,03; *5* — 0,021; *6* — 0,017; *7* — 0,015; *8* — 0,0137; *9* — 0,0138; *10* — 0,013 К. Из рисунка видно, что при заданных ρ_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ и Bi_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ поведение температурного поля в объеме $-1 \leqslant Z \leqslant 1$, $\rho \leqslant 2$ с изменением координат нелинейное. В остальном объеме, для которого безразмерный радиус ρ больше толщины слоя, значения температурного поля выравниваются по толщине слоя с ростом ρ и приближаются к температуре внешней среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике.— М. : Наука, 1974.— 831 с.
2. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* Узкозональный нагрев тел.— ФХОМ, 1977, № 3, с. 149—152.
3. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* Температурное поле в массивных телах при смешанных граничных условиях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 2, с. 132—136.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 13.03.78

УДК 539.377

Ю. М. Коляно, П. Т. Муравецкий

НАПРЯЖЕНИЯ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ДВИЖУЩИМСЯ ВГЛУБЬ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Рассмотрим полубесконечную пластинку $x \geqslant 0$, которая нагревается движущимся в направлении оси Ox призматическим источником тепла мощностью q_0. В этом случае для определения нестационарного температурного поля в пластинке имеем уравнение теплопроводности

$$\Delta T - \varkappa^2 T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q_0}{\lambda} N(x - v\tau,\ y) S_+(\tau), \tag{1}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $\varkappa^2 = \frac{\alpha}{\lambda\delta}$; α, λ, a — коэффициенты теплоотдачи с поверхностей $z = \pm\delta$, теплопроводности, температуропроводности; τ — время; $S_+(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta > 0, \\ 0, & \zeta \leqslant 0; \end{cases}$

$$N(x - v\tau,\ y) = [S_-(x - v\tau) - S_+(x - v\tau - b)]\,[S_-(y + d) - S_+(y - d)];$$

$S_-(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \geqslant 0, \\ 0, & \zeta < 0; \end{cases}$ v — скорость движения источника тепла. Если размеры b и $2d$ источника тепла малы по сравнению с его длиной 2δ, вместо уравнения теплопроводности (1) получаем уравнение

$$\Delta T - \varkappa^2 T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q}{2\lambda\delta}\delta_+(x - v\tau)\,\delta(y)\,S_+(\tau), \tag{2}$$

где

$$\frac{q}{2\delta}\delta_+(x - v\tau)\,\delta(y) = q_0 \lim_{\substack{b\to 0,\\ d\to 0}} N(x - v\tau,\ y);$$

$$q = q_0 V;\quad V = 4\delta b d.$$

Когда начальная температура пластинки равна нулю, поверхность $x = 0$ теплоизолирована, на бесконечности температура и ее производная по x исчезают, то после применения к уравнению (2) косинус-преобразования Фурье по x и Лапласа по τ получаем

$$\frac{d^2\hat{T}}{dy^2} - \gamma^2\hat{T} = -4Q\hat{\delta}_+\delta(y), \tag{3}$$

где

$$\hat{T} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dx \int_0^\infty T\cos\xi x e^{-s\tau} dx d\tau;\quad \gamma = \sqrt{\xi^2 + \varkappa^2 + \frac{s}{a}};\quad Q = \frac{q}{8\pi\lambda\delta}.$$

Решение уравнения (3) с учетом граничного условия $\hat{T}\big|_{|y|\to\infty} = 0$ имеет вид

$$\hat{T} = 2Q\hat{\delta}_+\frac{e^{-\gamma|y|}}{\gamma}. \tag{4}$$