$r_i(x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{k}(x_1, x_2, x_3)$ вместе с производными до второго порядка включительно. Тогда из теоремы вложения Соболева [5] следует достаточная малость норм $\|\psi_i\|_{C(\Omega_i)}$ $(i = 1, 2)$ и $\|\vec{v}\|_{C(V)}$ в пространствах непрерывных функций. Этим доказано такое утверждение.

Теорема. Если функции $g_i(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{e}(x_1, x_2, x_3)$ вместе с производными до третьего порядка и $p_0(x_1, x_2, x_3, t)$, $r_i(x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{k}(x_1, x_2, x_3)$ вместе с производными до второго порядка включительно изменяются достаточно мало, то решение задачи (1) — (5) устойчиво.

Замечание. С дополнительными условиями, найденными в работе [2], последняя теорема верна и для кусочно-гладких оболочек, взаимодействующих с акустическими средами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Костенко В. Г.* Единственность решения задачи о взаимодействии упругой оболочки с акустическими средами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 110—113.
2. *Костенко В. Г., Кулинич Я. М.* Єдиність розв'язку задачі про взаємодію кусково-гладкої пружної оболонки з акустичними середовищами.— Вісн. Львів. ун-ту. Сер. механ.-мат., 1978, вип. 13, с. 13—15.
3. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М. : Гостехиздат, 1957.— 476 с.
4. *Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э.* Эхо-сигналы от упругих объектов.— Таллин : Изд-во АН ЭССР, 1974.— 345 с.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.— 255 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 09.11.77

УДК 534.231 : 532

Р. И. Мокрик, Ю. А. Пырьев

ЭНЕРГИЯ ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОГО СЛОЯ С АКУСТИЧЕСКИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим жидкое акустическое полупространство $x_3 < 0$, ограниченное упругим слоем толщины h. Считаем, что при $x_3 > h$ упругие процессы отсутствуют. Геометрия задачи иллюстрируется рис. 1. Пусть ρ_1 — плотность упругого слоя, λ_1, μ_1— коэффициенты Ляме, определяющие его упругие свойства, ρ_2— плотность акустической жидкости, $\beta = \lambda_2^{-1}$ — коэффициент, определяющий сжимаемость жидкости. На верхней плоскости слоя отсутствуют касательные и нормальные напряжения. На границе раздела сред в области Ω (см. рис. 1) действует нормальная периодическая нагрузка. В условиях установившихся колебаний определяется энергия волнового процесса в упругом слое и прилегающей жидкости.

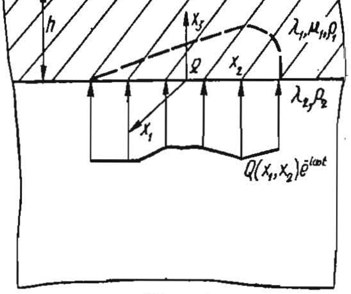

Рис. 1

Задача описывается уравнениями Ляме [3]

$$(\lambda_n + 2\mu_n) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}^n - \mu_n \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}^n - \rho_n \frac{\partial^2 \vec{u}^n}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

$$n = 1, 2, \quad \mu_2 = 0$$

и граничными условиями

$$
\begin{gathered}
\text{при } x_3 = h \quad \sigma_{13}^1 = 0, \quad \sigma_{23}^1 = 0, \quad \sigma_{31}^1 = 0; \\
\text{при } x_3 = 0 \quad \sigma_{33}^2 - \sigma_{33}^1 = \begin{cases} 0, & (x_1, x_2) \bar{\in} \Omega, \\ Q(x_1, x_2)\, e^{-i\omega t}, & (x_1, x_2) \in \Omega, \end{cases} \\
\sigma_{13}^1 = 0, \quad \sigma_{23}^1 = 0, \quad u_3^1 = u_3^2,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где $\vec{u}^n (u_1^n, u_2^n, u_3^n)$, $n = 1, 2$ — векторы перемещений соответственно в упругом слое и в акустической жидкости; σ_{mj}^n — компоненты тензора напряжений; $m, j = 1, 2, 3$; $i^2 = -1$. Считаем, что волновые поля ограничены на бесконечности.

Компоненты вектора $\vec{S}^n (S_1^n, S_2^n, S_3^n)$, определяющего плотность потока энергии в среде, в которой распространяются упругие волны, [1] будут такими:

$$
S_m^n = -\operatorname{Re}(\dot{u}_j^n) \operatorname{Re}(\sigma_{jm}^n), \quad \dot{u}_j^n = \frac{\partial u_j^n}{\partial t}. \tag{3}
$$

Для установившихся колебаний мощность какого-либо процесса удобно характеризовать ее средним значением за период. Усредняя равенства (3) по периоду, для компонент вектора средней интенсивности акустических волн $\langle S_m^n \rangle$ или, что то же, для компонент средней скорости потока акустической энергии, проходящей через единицу площади, перпендикулярной к направлению распространения волны, получаем представление

$$
\langle S_m^n \rangle = -\frac{1}{4} [\lambda_n (\dot{u}_m^{n*} u_{jj}^n + \dot{u}_m^n u_{jj}^{n*}) + 2\mu_n (\dot{u}_j^{n*} u_{mj}^n + \dot{u}_j^n u_{mj}^{n*})], \tag{4}
$$

где

$$
u_{mj}^n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_m} \right)
$$

(звездочка здесь обозначает комплексно-сопряженную величину).

Далее рассмотрим симметричную относительно фиксированной нормали к границе слоя (оси x_3) нагрузку, заданную в круге радиуса r_0'. Для такой нагрузки найдено волновое поле перемещений в упругом слое и в акустической жидкости. При решении задачи использованы принцип предельного поглощения [4] и метод перевала [1].

Для $\sigma_0(r - r_0) \gg 1$ средняя плотность потока энергии (4) в упругом слое $\langle S_r^1 \rangle$ и в акустическом полупространстве $\langle S_r^2 \rangle$ в направлении r' представляется в виде

$$
\begin{gathered}
\langle S_r^n \rangle = I_n(\varkappa, z) \frac{K}{r} [R_Q(\sigma_0 r_0)]^2, \quad \sigma_0(r - r_0) \gg 1, \qquad n = 1, 2, \\
I_n(\varkappa, z) = I_n(\sigma, \varkappa, z)|_{\sigma=\sigma_0}, \quad K = (4\pi h^4 c_t \rho_2)^{-1} P^2, \\
I_1(\sigma, \varkappa, z) = \lambda\varkappa\sigma^2 \{G_1 G_3 + G_4 [2\sigma^2 G_4 + G_2 (1 - 2\tau^2)\varkappa^2]\} \left[\frac{\partial}{\partial\sigma} \Delta(\sigma)\right]^{-2}, \; 0 \leqslant z \leqslant 1, \\
I_2(\sigma, \varkappa, z) = \sigma^2 \varkappa^{-1} [A(\sigma) \exp(\alpha z)]^2 \left[\frac{\partial}{\partial\sigma} \Delta(\sigma)\right]^{-2}, \qquad -\infty < z \leqslant 0,
\end{gathered}
\tag{5}
$$

где

$$
\begin{gathered}
G_1 = 2\beta^2 \alpha k (S_2 + C_2); \quad G_2 = \alpha k C_1; \\
G_3 = \alpha (2\sigma^2 S_2 + k C_2); \quad G_4 = \alpha (2\gamma\beta S_1 + k C_1); \\
S_1 = q_{12} \operatorname{ch}(\gamma z) - q_{11} \operatorname{sh}(\gamma z); \quad S_2 = q_{12} \operatorname{sh}(\gamma z) - q_{11} \operatorname{ch}(\gamma z); \\
C_1 = q_{11} \operatorname{sh}(\beta z) + q_{21} \operatorname{ch}(\beta z); \quad C_2 = q_{11} \operatorname{ch}(\beta z) + q_{21} \operatorname{sh}(\beta z); \\
q_{12} = k^2 (\operatorname{ch}\gamma \operatorname{ch}\beta - 1) - 4\gamma\beta\sigma^2 \operatorname{sh}\beta \operatorname{sh}\beta;
\end{gathered}
$$

$$q_{21} = 4\gamma\beta\sigma^2(\operatorname{ch}\gamma\operatorname{ch}\beta - 1) - k^2\operatorname{sh}\gamma\operatorname{sh}\beta;$$

$$q_{11} = k^2\operatorname{sh}\gamma\operatorname{ch}\beta - 4\gamma\beta\sigma^2\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\gamma;$$

$$\Delta(\sigma) = A(\sigma, \varkappa) + \alpha B(\sigma, \varkappa);$$

$$A(\sigma, \varkappa) = \lambda\varkappa^4\beta(k^2\operatorname{sh}\gamma\operatorname{ch}\beta - 4\sigma^2\gamma\beta\operatorname{sh}\beta\operatorname{ch}\gamma);$$

$$B(\sigma, \varkappa) = 8\gamma\beta\sigma^2k^2(1 - \operatorname{ch}\gamma\operatorname{ch}\beta) + (k^4 + 16\gamma^2\beta^3\sigma^2)\operatorname{sh}\gamma\operatorname{sh}\beta;$$

$$\gamma = \sqrt{\sigma^2 - \varkappa^2}; \quad \alpha = \sqrt{\sigma^2 - \tau_1^2\varkappa^2};$$

$$\beta = \sqrt{\sigma^2 - \tau^2\varkappa^2}; \quad k = 2\sigma^2 - \varkappa^2;$$

$$c_l = \sqrt{(\lambda_1 + 2\mu_1)/\rho_1}; \quad c_t = \sqrt{\mu_1/\rho_1}; \quad c = \sqrt{\lambda_2/\rho_2};$$

$$\tau = c_t/c_l; \quad \tau_1 = c_t/c; \quad \lambda = \rho_2/\rho_1; \quad \varkappa = h\omega/c_t;$$

$$r' = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}; \quad r = r'/h; \quad r_0 = r_0'/h; \quad z = x_3/h;$$

σ_0 — единственный положительный вещественный корень дисперсионного уравнения для рассматриваемой системы сред [2]

$$\Delta(\sigma, \varkappa) = 0, \quad \sigma_0 = k_0h; \tag{6}$$

k_0 — волновое число поверхностной волны;

$$P = 2\pi h^2\int_0^{r_0} Q(r)\,rdr, \quad R_Q(\sigma_0r_0) = 2\pi h^2P^{-1}\int_0^{r_0} Q(r)\,rJ_0(\sigma_0r)\,dr;$$

$R_Q(\sigma_0r_0)$ — спектральная функция источника; $J_0(t)$ — функция Бесселя первого рода. Решение (5) получено для случая более «быстрого» слоя, т. е. $c_l > c_t > c$ или, что то же, $\tau < 1 < \tau_1$.

Приведем вид спектральной функции для некоторых типов нагрузки. Для случая действия сосредоточенной силы P

$$R_Q(\sigma_0r_0) = 1,$$

в случае $Q(r) = Q_0[H(r) - H(r - r_0)]$ ($H(r)$ — функция Хевисайда)

$$R_Q(\sigma_0r_0) = 2\pi h^2P^{-1}Q_0r_0^2\,\frac{J_1(\sigma_0r_0)}{\sigma_0r_0},$$

в случае $Q(r) = 2Q_0(1 - r^2/r_0^2)[H(r) - H(r - r_0)]$

$$R_Q(\sigma_0r_0) = 2\pi h^2P^{-1}4Q_0r_0^2\,\frac{J_2(\sigma_0r_0)}{\sigma_0^2r_0^2}.$$

Как следует из решения (5), средняя плотность потока энергии от локально-распределенной нагрузки равна произведению средней плотности потока энергии при действии сосредоточенной силы на квадрат спектральной функции источника и убывает по r обратно пропорционально расстоянию.

Вследствие того что дисперсионное уравнение (6) имеет единственный положительный вещественный корень, из общего решения данной задачи, которое здесь не приводится из-за его громоздкости, следует, что вдали от источника возбуждения в упругом слое и прилегающей к нему жидкости будет распространяться один тип интерференционных волн, которые при достаточно низких частотах ($\varkappa \ll 1$), как и в работе [2], переходят в волны изгибного типа, а при достаточно высоких частотах ($\varkappa > \varkappa_0$) — в волны релеевского типа. Поэтому в данной работе приведены расчеты для средних значений параметра $0 < \varkappa < \varkappa_0$.

На рис. 2 представлено распределение средней плотности потока энергии, которое характеризуется функцией $I_n(\varkappa, z)$, по толщине слоя и в акустической жидкости, прилегающей к слою. Сплошные линии *1* и *2* иллюстрируют поведение функций $I_1(\varkappa, z)$ и $I_2(\varkappa, z)$ при $\varkappa = 0{,}7$ ($\tau^2 = 0{,}293$, $\tau_1^2 = 4{,}652$, $\lambda = 0{,}132$, $\varkappa_0 = 0{,}9$, что соответствует случаю сред сталь — вода), а штриховые линии 1 и 2 — при $\varkappa = 0{,}2$. Горизонтальный масштаб для сплошной линии приведен на верхней координатной линии, для штриховой — на нижней. Из приведенных расчетов видно, что поток энергии в основном сосредоточен в окрестностях границ слоя, причем в самом слое в окрестности свободной границы он больше, чем в окрестности границы раздела сред. Из сравнения результатов, представленных сплошными и штриховыми линиями, следует, что в первом случае поток энергии на границе упругого слоя меньше, чем на границе акустической среды, а во втором случае — наоборот. Отсюда следует, что существует характерное значение пара-

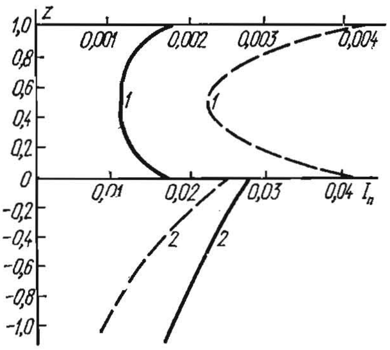

Рис. 2

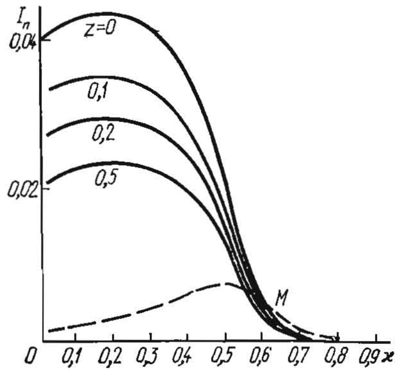

Рис. 3

метра $\varkappa^*$ (для данного случая $\varkappa^* = 0{,}656$), при котором потоки энергии в слое и окружающей акустической среде на границе раздела сред равны (рис. 3).

На рис. 3 представлена зависимость средней плотности потока энергии от параметра $\varkappa$. Сплошные линии соответствуют средней плотности потока энергии в слое для различных значений z, а штриховая линия — в жидкости на границе раздела сред. Из приведенных графиков видно, что максимальное значение средней плотности потока энергии в упругом слое достигается при меньших значениях параметра $\varkappa$, чем в акустической жидкости. В точке M средние плотности потока энергии в упругом слое и в акустической жидкости на границе раздела равны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах.— М. : Наука, 1973.— 343 с.
2. *Красильников В. М.* Некоторые свойства волновых процессов в жидком полупространстве, ограниченном упругим слоем.— Пробл. дифракции и распространения волн, 1965, вып. 4, с. 101—124.
3. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. 1.— М. : Изд-во иностр. лит., 1958.— 930 с.
4. *Свешников А. Г.* Принцип излучения.— Докл. АН СССР, 1950, **73**, № 5, с. 917—920.

Львовский университет
Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 20.01.78

УДК 539.377

Р. Н. Швец

О РЕШЕНИИ КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОЛОЧКИ С ИНОРОДНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Вопрос распределения напряжений в оболочках с инородными включениями (отверстие, шайба) с учетом конвективного теплообмена с поверхностей исследован мало. В работах [7, 9, 10] получены статические решения за-