На рисунке представлены графики изменения функции $\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_*}\right)$, температуры $t^+ = t\left(1, \frac{\tau}{\tau_*}\right)$ и напряжений $\sigma_0^+ = \sigma_0\left(1, \frac{\tau}{\tau_*}\right)$ для $\delta_0 = 0{,}2$, $R_0 = 40$ в зависимости от безразмерного времени $\frac{\tau}{\tau_*}$ ($\tau^* = 4$с) без ограничений (штриховые линии) и при ограничениях (сплошные) на напряжения $\left(\frac{\sigma_*}{E_0 T_*} = -0{,}18\right)$. Из приведенных графиков видно, что функция $\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_*}\right)$ в момент переключения τ_1 изменяется скачком и далее с приближением времени к моменту выхода становится постоянной. Кривая температуры в точке переключения преломляется и затем, плавно возрастая, достигает заданного значения T_* в момент времени τ_{**}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел.— Киев : Наук. думка, 1977.— 246 с.
2. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках.— К. : Вид-во АН УРСР, 1961.— 211 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 12.01.78

УДК 539.3; 534.1

В. Г. Костенко, Я. П. Кулинич

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ С АКУСТИЧЕСКИМИ СРЕДАМИ

Рассмотрим упругую изотропную оболочку V с гладкой границей $S = S_1 \cup S_2$, внешнюю к V неограниченную акустическую среду Ω_1 и акустический заполнитель Ω_2 оболочки V в процессе их взаимодействия, возникающего под воздействием начального возмущенного состояния в момент $t = 0$ и точечного возбудителя, помещенного в среду Ω_1.

Моделируя колебания упругой изотропной оболочки с помощью линейной теории упругости и принимая обозначения работы [1], этот процесс взаимодействия упругой оболочки с акустическими средами известным образом сводим [4] к математической задаче нахождения решения уравнений

$$\frac{1}{\beta_i^2}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2} - \Delta\psi_i = 0 \text{ в } \Omega_i, \qquad i = 1,\ 2, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2} - \mu\Delta\vec{v} - (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{v} = 0 \text{ в } V, \tag{2}$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$\psi_i|_{t=0} = g_i(x_1,\ x_2,\ x_3), \quad \left.\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right|_{t=0} = r_i(x_1,\ x_2,\ x_3) \text{ в } \Omega_i, \qquad i = 1,\ 2, \tag{3}$$

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{e}(x_1,\ x_2,\ x_3), \quad \left.\frac{d\vec{v}}{\partial t}\right|_{t=0} = \vec{k}(x_1,\ x_2,\ x_3) \text{ в } V,$$

условиям сопряжения

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - p_0(t,\ x_1,\ x_2,\ x_3)\,\sigma_{sk} = 0 \qquad (k \neq s),$$

$$\vec{v} = \vec{v}^1 \text{ на } S_1,$$

$$\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}, \quad \sigma_{sk}=0 \qquad (k\neq s), \tag{4}$$

$$\vec{v}=\vec{v}^2 \text{ на } S_2,$$

условиям излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial r}-\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)=0. \tag{5}$$

Кроме того, искомые функции должны быть ограниченными в их областях определения.

Аналогично работе [1] получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}J_R(t)=\iint\limits_{S_1}\left(\sum_{k=1}^{3}P_k w_k-\frac{1}{c_1^2}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial n}\right)dS_1+$$

$$+\iint\limits_{S_2}\left(\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial n}-\sum_{k=1}^{3}P_k w_k\right)dS_2+\frac{1}{c_1^2}\iint\limits_{S_R}\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}dS_R,$$

где

$$J_R(t)=\iiint\limits_V\left[\frac{\rho}{2}\sum_{k=1}^{3}w_k^2+\mu\sum_{k,l=1}^{3}\varepsilon_{kl}^2+\frac{\lambda}{2}\left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}\right)^2\right]dV+$$

$$+\frac{1}{2c_1^2}\iiint\limits_{\Omega_R}\left[\frac{1}{\beta_1^2}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_k}\right)^2\right]d\Omega_R+\frac{1}{2c_2^2}\iiint\limits_{\Omega_2}\left[\frac{1}{\beta_2^2}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_k}\right)^2\right]d\Omega_2. \tag{6}$$

Учитывая выражение $P_k=\sum_{l=1}^{3}\sigma_{kl}\cos(n,\ x_l)$, условия сопряжения (4) и условие излучения (5), находим

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}J_R(t)=\frac{\partial}{\partial t}J(t)=-\iint\limits_{S_1}p_0(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)\sum_{i=1}^{3}w_i\cos(n,\ x_i)\,dS_1 \tag{7}$$

($J(t)$ получаем из формулы (6) заменой Ω_R на Ω_1). Пусть $p_0(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$ достаточно мало, тогда из выражений (7) следует, что $\left|\frac{\partial}{\partial t}J(t)\right|<\varepsilon_1$, откуда интегрированием по t в конечном интервале $(0,\ T)$ получаем неравенство

$$|J(t)-J(0)|<\varepsilon_1 T \tag{8}$$

с достаточно малым ε_1, $T>0$. Так как $w_i|_{t=0}=\left.\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_{t=0}=k_i(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\varepsilon_{km}=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m}+\frac{\partial v_m}{\partial x_k}\right)\right|_{t=0}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial e_k}{\partial x_m}+\frac{\partial e_m}{\partial x_k}\right)$, $\left.\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right|_{t=0}=r_i(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\left.\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\right|_{t=0}=\frac{\partial g_i}{\partial x_k}$, то, предполагая достаточно малыми $\vec{k}(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\frac{\partial\vec{e}}{\partial x_j}$, $r_i(x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ $(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3)$ и учитывая, что $g_1(x_1,\ x_2,\ x_3)$ и $r_1(x_1,\ x_2,\ x_3)$ удовлетворяют условиям излучения (5), получаем достаточную малость сначала $J(0)$, а затем из неравенства (8) и $J(t)$, т. е. для произвольного $\varepsilon>0$ справедливы неравенства

$$\iiint\limits_V\left[\frac{\rho}{2}\sum_{k=1}^{3}w_k^2+\mu\sum_{k,l=1}^{3}\varepsilon_{kl}^2+\frac{\lambda}{2}\left(\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk}\right)^2\right]dV<\varepsilon,$$

$$\iiint\limits_{\Omega_i}\left[\frac{1}{\beta_i^2}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial t}\right)^2+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\right)^2\right]d\Omega_i<\varepsilon \qquad (i=1,\ 2).$$

Но отсюда еще не следует достаточная малость подынтегральных выражений всюду в областях интегрирования. Рассмотрим поэтому пространства функций Соболева W_2^3 в областях Ω_i $(i = 1, 2)$ и V с нормами

$$\|\psi_i\|_{W_2^3(\Omega_i)} = \iiint\limits_{\Omega_i} \sum_{k=0}^{3} \sum_{k=k_1+\ldots+k_4} \left(\frac{\partial^k \psi_i}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3} \partial t^{k_4}}\right)^2 d\Omega_i \qquad (i = 1, 2),$$

$$\|\vec{v}\|_{W_2^3(V)} = \iiint\limits_{V} \sum_{s=1}^{3} \sum_{k=0}^{3} \sum_{k=k_1+\ldots+k_4} \left(\frac{\partial^k v_s}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3} \partial t^{k_4}}\right)^2 dV.$$

Так как уравнения (1), (2) с постоянными коэффициентами и однородны, то производные решений этих уравнений также будут их решениями. В частности, функции $\psi_i^0 (x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\partial \psi_i}{\partial t}$ и вектор-функция $\vec{v}^0 = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ удовлетворяют уравнениям (1) и (2) соответственно, начальным условиям

$$\psi_i^0 |_{t=0} = r_i (x_1, x_2, x_3), \quad \left.\frac{\partial \psi_i^0}{\partial t}\right|_{t=0} = \beta_i^2 \Delta g_i (x_1, x_2, x_3) \text{ в } \Omega_i,$$

$$\vec{v}^0 |_{t=0} = \vec{k} (x_1, x_2, x_3), \quad \left.\frac{\partial v^0}{\partial t}\right|_{t=0} = \mu \Delta \vec{e} (x_1, x_2, x_3,) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{e} \text{ в } V,$$

условиям сопряжения

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial \psi_1^0}{\partial t} - \frac{\partial p_0}{\partial t}, \quad \sigma_{ks}^0 = 0 \quad (k \neq s), \quad \vec{v}^0 = \vec{v}^{(01)} \text{ на } S_1,$$

$$\sigma_{11}^0 = \sigma_{22}^0 = \sigma_{33}^0 = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial \psi_2^0}{\partial t}, \quad \sigma_{ks}^0 = 0 \quad (k \neq s), \quad \vec{v}^0 = v^{(02)} \text{ на } S_2,$$

условиям излучения на бесконечности

$$\lim_{r \to \infty} r \left(\frac{\partial \psi_1^0}{\partial r} - \frac{\partial \psi_1^0}{\partial t}\right) = 0.$$

Если дополнительно предположить достаточно малыми $\frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial x_k \partial x_s}$, $\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_s}$, $\frac{\partial r_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial \vec{k}}{\partial x_j}$, то аналогично предыдущему получим

$$\iiint\limits_{V} \left[\frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^{3} w_k^{0^2} + \mu \sum_{k,l=1}^{3} \varepsilon_{kl}^{0^2} + \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}^0\right)^2\right] dV < \varepsilon,$$

$$\iiint\limits_{\Omega_i} \left[\frac{1}{\beta_i^2} \left(\frac{\partial \psi_i^0}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_k}\right)^2\right] d\Omega_i < \varepsilon,$$

где $w_k^0 = \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}$; $\varepsilon_{kl}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_l \partial t} + \frac{\partial^2 v_e}{\partial x_k \partial t}\right)$; $\varepsilon_{kk}^0 = \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial t}$; $\frac{\partial \psi_i^0}{\partial t} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2}$; $\frac{\partial \psi_i^0}{\partial x_l} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_l \partial t}$.

Рассматривая аналогично все производные первого и второго порядков функций ψ_1, ψ_2 и вектор-функции $\vec{v}$ как решения соответствующих задач для уравнений (1), (2), а также учитывая известное неравенство Фридрихса [3], приходим к заключению, что нормы $\|\psi_i\|_{W_2^3(\Omega_i)}$ $(i = 1, 2)$ и $\|\vec{v}\|_{W_2^3(V)}$ будут как угодно малыми, если предположить достаточно малыми $g_i (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{e}(x_1, x_2, x_3)$ вместе с производными до третьего порядка и $p_0(x_1, x_2, x_3, t)$,

$r_i(x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{k}(x_1, x_2, x_3)$ вместе с производными до второго порядка включительно. Тогда из теоремы вложения Соболева [5] следует достаточная малость норм $\|\psi_i\|_{C(\Omega_i)}$ $(i = 1, 2)$ и $\|\vec{v}\|_{C(V)}$ в пространствах непрерывных функций. Этим доказано такое утверждение.

Теорема. Если функции $g_i(x_1, x_2, x_3)$, $\vec{e}(x_1, x_2, x_3)$ вместе с производными до третьего порядка и $p_0(x_1, x_2, x_3, t)$, $r_i(x_1, x_2, x_3)$ и $\vec{k}(x_1, x_2, x_3)$ вместе с производными до второго порядка включительно изменяются достаточно мало, то решение задачи (1) — (5) устойчиво.

Замечание. С дополнительными условиями, найденными в работе [2], последняя теорема верна и для кусочно-гладких оболочек, взаимодействующих с акустическими средами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Костенко В. Г.* Единственность решения задачи о взаимодействии упругой оболочки с акустическими средами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 110—113.
2. *Костенко В. Г., Кулинич Я. М.* Єдиність розв'язку задачі про взаємодію кусково-гладкої пружної оболонки з акустичними середовищами.— Вісн. Львів. ун-ту. Сер. механ.-мат., 1978, вип. 13, с. 13—15.
3. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике.— М. : Гостехиздат, 1957.— 476 с.
4. *Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э.* Эхо-сигналы от упругих объектов.— Таллин : Изд-во АН ЭССР, 1974.— 345 с.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1950.— 255 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 09.11.77

УДК 534.231 : 532

Р. И. Мокрик, Ю. А. Пырьев

ЭНЕРГИЯ ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УПРУГОГО СЛОЯ С АКУСТИЧЕСКИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ ПРИ ДЕЙСТВИИ ЛОКАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим жидкое акустическое полупространство $x_3 < 0$, ограниченное упругим слоем толщины h. Считаем, что при $x_3 > h$ упругие процессы отсутствуют. Геометрия задачи иллюстрируется рис. 1. Пусть ρ_1 — плотность упругого слоя, λ_1, μ_1 — коэффициенты Ляме, определяющие его упругие свойства, ρ_2 — плотность акустической жидкости, $\beta = \lambda_2^{-1}$ — коэффициент, определяющий сжимаемость жидкости. На верхней плоскости слоя отсутствуют касательные и нормальные напряжения. На границе раздела сред в области Ω (см. рис. 1) действует нормальная периодическая нагрузка. В условиях установившихся колебаний определяется энергия волнового процесса в упругом слое и прилегающей жидкости.

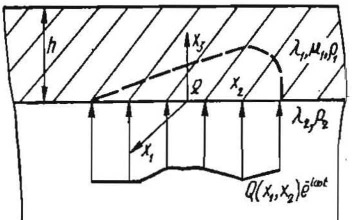

Рис. 1

Задача описывается уравнениями Ляме [3]

$$(\lambda_n + 2\mu_n)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}^n - \mu_n \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{u}^n - \rho_n \frac{\partial^2 \vec{u}^n}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$n = 1, 2, \quad \mu_2 = 0$$