

И. П. Лысый

**АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ СЛОЯ
И КЛИНА С ТРЕЩИНАМИ**

Рассмотрим бесконечный слой толщиной $2d$, находящийся в условиях антиплоской деформации и содержащий n трещин, расположенных вдоль полос $a_k \leq x \leq b_k$, $y = 0$ ($k = \overline{1, n}$). Пусть на гранях слоя заданы смещения, сдвигающие усилия или их комбинации, а берега трещин свободны от напряжений.

Для решения поставленной задачи воспользуемся результатами работ [2, 3, 5] и аналогией между продольным сдвигом и стационарной теплопроводностью тел с трещинами [1]. На основе работ [1, 2] для определения производной от смещения $w(x)$ получаем интегральное уравнение

$$\int_L w'(x) K^* \left(\frac{\xi - x}{d} \right) d\xi = \pi df(x), \quad f(x) = -\frac{\partial w^*(x, 0)}{\partial y} \quad (x \in L, y = 0), \quad (1)$$

$$K^*(t) = \int_0^\infty \mathcal{L}(\eta) \sin \eta t d\eta, \quad L = \bigcup_{k=1}^n L_k, \quad L_k = [a_k, b_k] \quad (2)$$

($w^*(x, y)$ — смещение в сплошном слое). Функция $\mathcal{L}(\eta)$ для рассматриваемых граничных условий соответственно имеет вид

$$1) \mathcal{L}(\eta) = \operatorname{cth} \eta, \quad 2) \mathcal{L}(\eta) = \operatorname{th} \eta, \quad 3) \mathcal{L}(\eta) = \frac{\eta \operatorname{th} \eta + Bd}{\eta + Bd \operatorname{th} \eta}. \quad (3)$$

Здесь B — произвольный коэффициент.

Если на гранях слоя заданы смещения или сдвигающие усилия, то уравнение (1) решается точно; когда задано их комбинацию, то при $Bd > 1$ функция $\mathcal{L}(\eta)$ с точностью до 3,8% аппроксимируется выражением $\mathcal{L}(\eta) = \operatorname{cth} A\eta$, где $A = \frac{1 + Bd}{Bd}$, и тогда также получаем точное решение [1].

В указанных случаях

$$w'(v) = -\frac{Ad}{\pi w} \frac{m-1}{2} X(v) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{L^*} \frac{X(s) f^*(s)}{s^2 (s-v)} ds + P_{n-1}(v) \right\}, \quad (4)$$

где $X(z) = \left[\prod_{k=1}^n (b_k^* - z)(z - a_k^*) \right]^{1/2}$; $s = \exp \frac{\pi \xi}{dA}$; $v = \exp \frac{\pi x}{dA}$; $L^* = \bigcup_{k=1}^n L_k$; $L_k^* = [a_k^*, b_k^*]$; $a_k^* = \exp \frac{\pi a_k}{dA}$; $b_k^* = \exp \frac{\pi b_k}{dA}$; $f^*(s) = f(x)$; $m = 1$ соответствует заданию на гранях слоя смещений, $m = 2$ — сдвигающих усилий; $P_{n-1}(v)$ — полином степени $n - 1$, коэффициенты которого определяются из условий $w(a_k) = w(b_k) = 0$. Если $\mathcal{L}(\eta)$ задано первым или вторым выражением (3), необходимо положить в уравнении (4) и принятых обозначениях $A = 1$.

Располагая выражением $w'(x)$, коэффициенты интенсивности напряжений определяем по формуле [6]

$$k_3^\pm = \mp G \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{(-1)^{\frac{c-a_k}{b_k-a_k}} (x-c) \frac{\partial w(x, 0)}{\partial x}}, \quad (5)$$

где $c_k = a_k$ или b_k ; G — модуль сдвига; верхний знак соответствует правому концу трещины, нижний — левому.

Для произвольных значений Bd решение уравнения (1) находится с помощью асимптотических методов, причем рассматриваются два метода решения, каждый из которых целесообразно использовать на некотором ин-

тервале изменения параметра d . Согласно работам [1, 2], $w'(x)$ для значений $\frac{2d}{b_n - a_1} > 1$ определяется по формуле

$$w'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d^{-2k} w_n'(x). \quad (6)$$

Здесь

$$w_0'(x) = -\frac{1}{\pi X(x)} \left\{ \int_L^{\infty} \frac{X(\xi) f(\xi) d\xi}{\xi - x} + P_{n-1}(x) \right\}, \quad (7)$$

$$w_n'(x) = \frac{1}{\pi^2 X(x)} \int_L^{\infty} \frac{X(\xi) d\xi}{\xi - x} \int_L^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} d_{n-k} w_n'(\tau) (\tau - \xi)^{2(n-k)-1} d\xi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$d_n = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \int_0^{\infty} [1 - \mathcal{L}(\eta)] \eta^{2k-1} d\eta.$$

Решение интегрального уравнения (1) при малых значениях d , когда имеется одна трещина, записывается в виде [3]

$$w(x) = \int_x^l \left[\omega' \left(\frac{l-\xi}{d} \right) - \omega' \left(\frac{l+\xi}{d} \right) - v_0(x) \right] dx, \quad (8)$$

где

$$v_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi \left(\frac{x-\tau}{d} \right)}}{\mathcal{L}(\xi)} d\xi,$$

а $\omega'(x)$ определяется из уравнения Винера — Хопера

$$\int_0^{\infty} \omega'(\tau) K^*(\tau - \xi) d\tau = \pi \psi(\xi) \quad (0 \leq \xi < \infty). \quad (9)$$

Здесь $\psi(\xi) = f(d\xi - l)$, причем эта функция аналитически продолжается в область $2/\delta \leq \xi < \infty$ ($\delta = d/l$).

В качестве примера рассмотрим случай слоя с одной трещиной, расположенной вдоль полосы $|x| \leq l$, $y = 0$. Пусть на поверхностях слоя $y = \pm d$ задано постоянное смещение противоположных знаков $\pm w_0$. Используя точное решение (4), коэффициенты интенсивности напряжений для правой k_3^+ и левой k_3^- вершин трещины в слое определяем по формуле

$$k_3^{\pm} = G\omega\delta^{-1/2} \sqrt{2l \operatorname{th} \pi/2\delta}. \quad (10)$$

Найдем также выражения для k_3^{\pm} на основе асимптотического решения. В частности, для слоя большой относительной толщины ($\delta > 1$) из формул (5) и (6) получаем

$$k_3^{\pm} = \frac{G\omega_0 \sqrt{\pi l}}{\delta} \left[1 - \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ni} \delta^{-2n} + O(\delta^{-2N}) \right], \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} &= \frac{d_i}{2} \quad (i = 1, 2, 3); \quad \varepsilon_{21} = -\frac{d_1^2}{2} + \frac{5}{8} d_2; \\ \varepsilon_{31} &= \frac{1}{4} d_1^3 - \frac{11}{16} d_1 d_2 + \frac{9}{8} d_3; \quad \varepsilon_{32} = -\frac{1}{4} d_1 d_2 + \frac{3}{2} d_3; \\ d_1 &= 0,8225; \quad d_2 = -0,1353; \quad d_3 = 0,0318. \end{aligned}$$

Для слоя малой относительной толщины ($\delta < 1$) на основании формулы (8) получаем

$$k_3^\pm = G\omega_0\delta^{-1/2}\sqrt{2l}. \quad (12)$$

Если в бесконечном слое при указанных условиях имеются две равные трещины, расположенные в плоскости $y = 0$ вдоль полос $a \leq |x| \leq b$, то, используя точное решение (4), для коэффициентов интенсивности напряжений $k_3^{(a)}$ ($c = a, b$) получаем формулы

$$k_3^{(a)} = \frac{2G\omega_0 b \operatorname{ch} \frac{\pi b}{2d}}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{2d} \sqrt{a \operatorname{sh} \frac{\pi a}{d} (b^{*2} - a^{*2})}} \left(C^* - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi a}{d}}{\operatorname{sh} \frac{\pi b}{d}} \right), \quad (13)$$

$$k_3^{(b)} = - \frac{2G\omega_0 b \operatorname{ch} \frac{\pi b}{2d}}{\operatorname{ch} \frac{\pi a}{2d} \sqrt{a \operatorname{sh} \frac{\pi b}{d} (b^{*2} - a^{*2})}} \left(C^* - \frac{b^*}{a^*} \right),$$

где

$$C^* = \frac{1}{K(\rho)} \Pi \left(\frac{\pi}{2}, q, \rho \right); \quad a^* = \operatorname{th} \frac{\pi a}{2d}, \quad b^* = \operatorname{th} \frac{\pi b}{2d}, \quad q = \frac{b^{*2} - a^{*2}}{b^{*2} - 1},$$

$$\rho = \frac{\sqrt{b^{*2} - a^{*2}}}{b^*}, \quad K(\rho), \quad \Pi \left(\frac{\pi}{2}, q, \rho \right) - \text{эллиптические интегралы первого и третьего рода соответственно.}$$

Если исходить из приближенных формул (6), (7), то для слоя большой толщины получим

$$k_2^{(a)} = \frac{G\sqrt{\pi}}{r\sqrt{a}} \left\{ \frac{\omega_0 M r^2}{2\delta_1} - C_0 \left[1 + \frac{d_1}{2} r^2 \delta_1^{-2} + \frac{d_2}{8} (-11\varepsilon^4 + 6\varepsilon^2 + 5) \delta_1^{-4} \right] \right\} +$$

$$+ O(\delta_1^{-6}),$$

$$k_2^{(b)} = \frac{G\sqrt{\pi}}{r\sqrt{b}} \left\{ \frac{\omega_0 M r^2}{2\delta_1} + C_0 \left[1 - \frac{d_1}{2} r^2 \delta_1^{-2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{d_2}{8} (5\varepsilon^4 + 6\varepsilon^2 - 11) \delta_1^{-4} \right] \right\} + O(\delta_1^{-6}),$$

$$M = 1 - \frac{d_2}{8} (1 - \varepsilon^2) \delta_1^{-4}, \quad r = \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \frac{a}{b}, \quad \delta_1 = \frac{d}{b}, \quad (14)$$

$$C_0 = \frac{\omega_0 M [(1 + \varepsilon^2) K(r) - 2E(r)]}{2\delta_1 \left\{ K(r) + \frac{d_1}{2} [(1 + \varepsilon^2) K(r) - 2E(r)] \delta_1^{-2} + \right.}$$

$$\left. + d_2 \left[\frac{1}{8} (5\varepsilon^4 + 6\varepsilon^2 + 5) K(r) - (1 + \varepsilon^2) E(r) \right] \delta_1^{-4} \right\}.$$

Здесь $E(r)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

На рис. 1 приведены графики зависимости величины $\tilde{k}_3 = \frac{\delta k_3}{G\omega_0 \sqrt{l\pi}}$ от относительной толщины слоя δ , подсчитанные по точной формуле (10) (штриховая линия) и асимптотическим формулам (11) и (12). При $\delta = 1,1$ относительная ошибка значений k_3 , подсчитанных по формулам (10) и (12), составляет 6%, а для $\delta = 1,5$ ошибка между точным значением k_3 и приближенным (11) не превосходит 1,5%, причем относительная ошибка этих значений очень быстро уменьшается с ростом δ (для больших δ) или с уменьшением δ (для малых δ).

Рассмотрим клиновидное тело с углом раствора $\theta = 2\alpha$, $0 \leq r < \infty$, которое находится в условиях антиплоской деформации. Пусть вдоль по-

лос $a_k \leq r \leq b_k$ ($k = \overline{1, n}$), $\alpha = 0$ имеется n трещин, берега которых свободны от напряжений, а на гранях клиновидного тела заданы смещения или напряжения.

На основе работы [4] и аналогии между продольным сдвигом и стационарной теплопроводностью тел с трещинами [1] для определения производной от смещения $w(r, 0) = w(r)$ получим интегральное уравнение

$$\int_L w'(\rho) R(\ln \rho/r) d\rho = \pi f(r), \quad f(r) = -\frac{\partial w^*(r, 0)}{\partial \theta} \quad (r \in L), \quad (15)$$

где $w^*(r, \theta)$ — смещения в сплошном клине. Ядро $R(t)$ для заданных на гранях клина смещений или напряжений соответственно имеет вид

$$1) R(t) = \frac{\pi}{2\alpha} \operatorname{cth} \frac{\pi t}{2\alpha}, \quad 2) R(t) = \frac{\pi}{2\alpha} \operatorname{csch} \frac{\pi t}{2\alpha}.$$

Решение интегрального уравнения (15) будет [1, 4] таким:

$$w'(r) = -\frac{r^{1/m}}{\alpha r X(r_*)} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\rho^{m-1} X(\rho_*) f(\rho) d\rho}{\rho_* (\rho_* - r_*)} + P_{n-1}(r) \right\}, \quad \tau_* = \frac{\pi}{\alpha}. \quad (16)$$

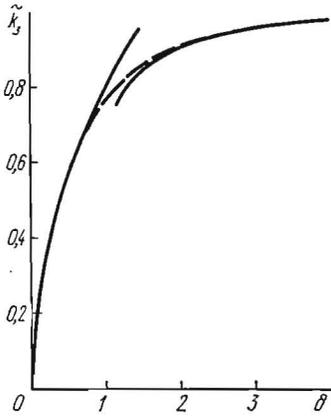


Рис. 1

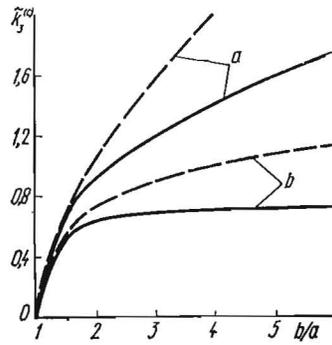


Рис. 2

Если в клиновидном теле имеется одна трещина ширины $2l = b - a$, а на гранях клина заданы постоянные смещения противоположных знаков $\pm w_0$, то, используя формулы (16) и (5) (если в последней заменить x на r), для коэффициентов интенсивности напряжений $k_3^{(c)}$ ($c = a, b$) получаем

$$k_3^{(a)} = \frac{Gw_0 \sqrt{2} (b_*^{1/2} - a_*^{1/2})}{\sqrt{\alpha a (b_* - a_*)}}, \quad k_3^{(b)} = \frac{Gw_0 \sqrt{2} (b_*^{1/2} - a_*^{1/2})}{\sqrt{ab (b_* - a_*)}}. \quad (17)$$

На рис. 2 приведены графики зависимости коэффициентов интенсивности напряжений $\tilde{k}_3^{(c)} = \frac{\alpha \sqrt{c}}{Gw_0 \sqrt{2}} k_3^{(c)}$ от отношения b/a для $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (сплошная линия) и $\alpha = \pi$ (штриховая). С ростом угла раствора клина α коэффициенты $k_3^{(c)}$ увеличиваются, причем $k_3^{(a)}$ всегда больше $k_3^{(b)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кит Г. С. Об аналогии между продольным сдвигом и стационарной теплопроводностью тел с включениями и трещинами. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 4, с. 334—337.
2. Кит Г. С., Лысый И. П. Стационарное температурное поле в полосе и слое при смешанных граничных условиях. — ИФЖ, 1972, 22, № 1, с. 123—128.
3. Кит Г. С., Лысый И. П. Термоупругое состояние узкой полосы с трещиной. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 3, с. 26—29.

4. Кит Г. С., Лысый И. П. Влияние стационарного температурного поля на коэффициенты интенсивности напряжений в клине с трещиной. — Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1977, вып. 17, с. 88—92.
5. Лысый И. П. Термоупругое состояние полосы с двумя продольными трещинами, обусловленное возмущением температурного поля. — ФХММ, 1974, № 4, с. 79—84.
6. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
03.03.78

УДК 539.311

Р. М. Луцышин

О РАСКЛИНИВАНИИ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Проблема расклинивания упругой полуплоскости исследована в работе [1] и сведена к интегральному уравнению первого рода с сингулярным ядром сложной формы, которое решается асимптотическим методом. В настоящей работе с использованием комплексных потенциалов Колосова — Мусхели-

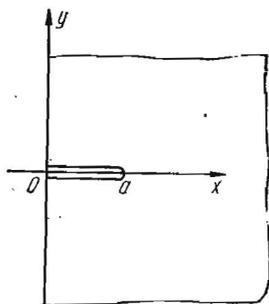


Рис. 1

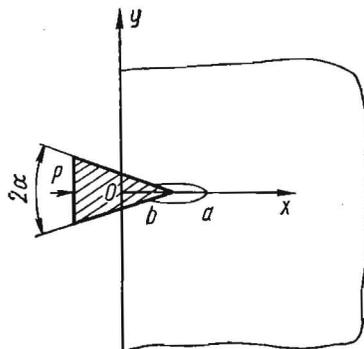


Рис. 2

швили эта задача сведена к интегральному уравнению, которое обращается приближенно в замкнутой форме способом аппроксимации ядра, предложенным в статье [3].

Рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии полуплоскости с краевым разрезом, перпендикулярным к границе. Направим ось ox вдоль линии разреза, ось oy вдоль границы полуплоскости так, что область, занятая телом, определится условием $\operatorname{Re} z \geq 0$, $z = x + iy$. Пусть кромки разреза (рис. 1) $[0, a]$ нагружены нормальными напряжениями $\sigma_y^+ = \sigma_y^- = p(x)$, $\tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0$. Производные от смещений точек кромок вследствие симметрии удовлетворяют условиям $\frac{\partial u^+}{\partial x} = \frac{\partial u^-}{\partial x}$, $\frac{\partial v^+}{\partial x} = -\frac{\partial v^-}{\partial x} = g(x)$. Знак «плюс» обозначает, что данная величина относится к верхней кромке, а знак «минус» — к нижней. Граница полуплоскости предполагается свободной от внешних напряжений.

Для решения задачи воспользуемся аналитическим продолжением функции $\Phi(z)$ в область $\operatorname{Re} z < 0$:

$$\Phi(z) = -\bar{\Phi}(-z) + z\bar{\Phi}'(-z) + \bar{\Psi}(-z). \quad (1)$$

Слагая и вычитая известные [2] формулы

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) + z\bar{\Phi}'(\bar{z}) + \bar{\Psi}(\bar{z}), \quad (2)$$

$$2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \kappa\Phi(z) - \bar{\Phi}(\bar{z}) - z\bar{\Phi}'(\bar{z}) - \bar{\Psi}(\bar{z}), \quad (3)$$