

Интегральные уравнения задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной цилиндрической и пологой сферической оболочек с разрезами (трещинами) приведены в работах [11, 14].

Отметим, что использование сдвиговой модели в теории изотропных оболочек с разрезами позволяет уточнить результаты исследований, полученные на базе классической теории оболочек. Последнее достигается путем более точного удовлетворения граничным условиям на берегах разрезов, когда вместо принятого в классической теории условия на обобщенное в смысле Кирхгофа перерезывающее усилие удовлетворяются физически естественные граничные условия на перерезывающие усилия и крутящий момент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.— 280 с.
2. *Власов В. З.* Избранные труды.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.— Т. 1. 528 с.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек.— М.: Наука, 1976.— 512 с.
4. *Даревский В. М.* Решение некоторых вопросов теории цилиндрической оболочки.— Прикл. математика и механика, 1952, 16, вып. 2, с. 159—194.
5. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1968.— 288 с.
6. *Каландия А. И.* Замечание о креплении полуплоскости стрингером конечной длины.— В кн.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с. 211—215.
7. *Кренер Э.* Общая континуальная теория дислокаций и собственных напряжений.— М.: Мир, 1965.— 104 с.
8. *Новацкий В.* Теория упругости.— М.: Мир, 1975.— 872 с.
9. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек.— Л.: Судпромгиз, 1962.— 432 с.
10. *Осадчук В. А.* Напряжения в замкнутой цилиндрической оболочке с системой коллинеарных трещин.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, № 7, с. 38—42.
11. *Осадчук В. А., Николишин М. М.* Напряженное состояние ослабленной трещиной замкнутой трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 7, с. 619—623.
12. *Осадчук В. А., Подстригач Я. С.* К определению напряженного состояния в замкнутой цилиндрической оболочке и бесконечной пластинке с трещинами.— Механика твердого тела, 1973, № 3, с. 69—78.
13. *Осадчук В. А., Федюк Е. М.* Система произвольно ориентированных трещин в пологой сферической оболочке.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 711—715.
14. *Осадчук В. А., Федюк Е. М.* Интегральные уравнения задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пологой сферической оболочки с трещиной.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 2, с. 141—145.
15. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках.— Киев: Наук. думка, 1976.— 444 с.
16. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— Киев: Наук. думка, 1973.— 248 с.
17. *Подстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках.— К.: Вид-во АН УРСР, 1961.— 212 с.
18. *Попов Г. Я.* Об интегральных уравнениях теории упругости с разностными и суммарными ядрами.— Прикл. математика и механика, 1970, 34, вып. 4, с. 603—619.
19. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. Т. 1.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962.— 274 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
09.02.78

УДК 539.377

Г. С. Кит, И. П. Лысый

О ТЕРМОУПРУГОМ СОСТОЯНИИ ПОЛОСЫ С ТРЕЩИНАМИ

В работах [3, 4] рассмотрены задачи о термоупругом состоянии широкой и узкой полос с трещиной, когда грани полос свободны от усилий. В настоящей работе определяются коэффициенты интенсивности напряжений в широкой полосе с продольными трещинами, когда полоса зажата между двумя абсолютно жесткими гладкими основаниями либо жестко сцеплена с ними.

Пусть в бесконечной полосе шириной $2d$ имеется n трещин длиной $2l_k = b_k - a_k$, расположенных симметрично относительно граней полосы. Будем считать, что на гранях полосы заданы температурные условия первого, второго или третьего рода, а берега трещин теплоизолированы. Тогда температурное поле можно представить в виде суммы основного (имеющего место в сплошной полосе) и возмущенного (обусловленного наличием трещин) полей. Задача определения температурного поля рассмотрена в работе [2].

Изложим способ определения коэффициентов интенсивности напряжений k_i ($i = 1, 2$) в полосе с трещинами. Коэффициенты k_i , обусловленные основным температурным полем, определяются решением задачи термоупругости для сплошной полосы с дальнейшим снятием усилий, возникающих на месте трещин. Метод решения такой задачи при заданных на берегах трещин нормальных усилиях σ_{yy}^0 приведен в работе [1].

Коэффициенты k_i , обусловленные возмущенным температурным полем и касательными усилиями σ_{xy}^0 на берегах трещин, легко найти по известным производным по x от смещений берегов трещин. В этом случае вследствие антисимметричности термонапряженного состояния относительно линии расположения трещин коэффициент $k_1 = 0$, а k_2 определяется по формуле

$$k_2 = \frac{(-1)^{\frac{c-a_k}{b_k-a_k}} E V \pi}{V^2 (1-\chi^2)} \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{\frac{c-a_k}{(-1)^{\frac{c-a_k}{b_k-a_k}} (x-c)}} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x}, \quad (1)$$

где $c = a_k$ или $c = b_k$; $\chi = \nu$ при плоской деформации; $\chi = 0$ при плоском напряженном состоянии; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; $u(x)$ — смещение верхнего берега трещин в направлении оси Ox .

Применяя к уравнениям равновесия в перемещениях интегральное преобразование Фурье и учитывая граничные условия

1) $\sigma_{xy}(x, \pm d) = 0$, $v(x, \pm d) = 0$ либо 2) $u(x, \pm d) = v(x, \pm d) = 0$; $\sigma_{yy}(x, 0) = 0$ ($|x| < \infty$), $\sigma_{xy}(x, 0) = 0$ ($x \in L$), $u(x, 0) = 0$ ($x \notin L$), $L =$

$= \bigcup_{k=1}^n L_k$, $L_k = [a_k, b_k]$, сводим задачу к решению дуальных интегральных уравнений, из которых после перехода к оригиналу для определения $u'(x)$ получаем интегральное уравнение

$$\int_L u'(\xi) R_1 \left(\frac{\xi-x}{d} \right) d\xi = -\pi B_1 d \sigma_{xy}^0(x) + D_0 \int_L t(\xi) R_2 \left(\frac{\xi-x}{d} \right) d\xi, \quad (2)$$

где $t(\xi)$ — возмущенное температурное поле в полосе с трещинами; $D_0 = \alpha_t (1-\chi)$; $B_1 = \frac{2(1-\chi^2)}{E}$;

$$R_i(w) = \int_0^\infty \mathcal{L}_i(\eta) \sin \eta w d\eta \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Функции $\mathcal{L}_i(\eta)$ для условий 1), 2) на гранях полосы имеют вид

$$1) \mathcal{L}_1(\eta) = \frac{\text{sh } 2\eta + 2\eta}{\text{ch } 2\eta + 1}, \quad \mathcal{L}_2(\eta) = \frac{\text{sh } 2\eta [1 - \eta \mathcal{Z}(\eta)] + 2\eta \text{ch}^2 \eta}{\text{ch } 2\eta + 1},$$

$$2) \mathcal{L}_1(\eta) = \frac{2\eta^2 + \kappa \text{ch } 2\eta + \frac{1}{2}(\kappa + 1)}{\kappa \text{sh } 2\eta + 2\eta},$$

$$\mathcal{L}_2(\eta) = \frac{(\lambda + \mu) \eta^2 + \lambda \text{sh}^2 \eta + (\lambda + 2\mu) \eta \text{sh } 2\eta + \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) \mathcal{Z}(\eta) (2\eta \text{ch } 2\eta - \text{sh } 2\eta)}{(\lambda + \mu)^2 (\kappa \text{sh } 2\eta + 2\eta)},$$

$\mathcal{L}(\eta)$ для граничных условий первого, второго и третьего рода на температуру дается соответственно соотношениями 2]: $\mathcal{L}(\eta) = \text{cth } \eta$, $\mathcal{L}(\eta) = \text{th } \eta$, $\mathcal{L}(\eta) = \frac{\eta \text{th } \eta + h^* d}{\eta + h^* d \text{th } \eta}$; λ и μ — коэффициенты Ляме; $\kappa = 3 - 4\nu$ для

плоской деформации, $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ для плоского напряженного состояния; h^* — приведенный коэффициент теплообмена.

Отметим, что вторым слагаемым правой части уравнения (2) определяются касательные напряжения на средней линии сплошной полосы, обусловленные заданной на $\pm L$ температурой $\pm t(x)$. Если грани полосы свободны от усилий, то ядра $R_1(\omega)$ и $R_2(\omega)$ совпадают, интегралы левой и правой частей можно объединить (см. [3]), и тогда интегральное уравнение задачи термоупругости совпадает с интегральным уравнением соответствующей силовой задачи. Такое утверждение имеет место для любой односвязной области, на границе которой заданы внешние нагрузки. При других граничных условиях это не выполняется.

Уравнение (2) для широкой полосы $\left(\frac{2d}{b_n - a_1} > 1\right)$ решаем асимптотическим методом. Ядра $R_i(\omega)$ представляем в виде

$$R_i(\omega) = \frac{1}{\omega} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} \omega^{2k-1}, \quad (4)$$

где

$$a_k^{(i)} = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \int_0^{\infty} [1 - \mathcal{L}_i(\eta)] \eta^{2k-1} d\eta. \quad (5)$$

Решение уравнения (2) ищем в виде ряда

$$u'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d^{-2n} u'_n(x). \quad (6)$$

Аналогичным рядом представим температуру $t(x)$. Подставим полученные ряды в уравнение (2), приравняем выражения при одинаковых степенях d и применим к полученным уравнениям формулу обращения интеграла типа Коши. Тогда для определения $u'_n(x)$ получим рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} u'_0(x) &= \frac{1}{\pi X(x)} \left\{ \int_L^{\infty} \frac{X(\eta)}{\eta - x} \left[\sigma_{xy}^0(\eta) + \frac{D_0}{\pi} \int_L^{\infty} \frac{t_0(\tau)}{\tau - \eta} d\tau \right] d\eta + P_{n-1}(x) \right\}, \\ u'_n(x) &= \frac{1}{\pi^2 X(x)} \int_L^{\infty} \frac{X(\eta)}{\eta - x} \left\{ D_0 \int_L^{\infty} \frac{t_n(\tau)}{\tau - \eta} d\tau - \sum_{k=0}^{n-1} \int_L^{\infty} [a_{n-k}^{(1)} u'_n(\tau) - \right. \\ &\quad \left. - D_0 a_{n-k}^{(2)} t_k(\tau)] (\tau - \eta)^{2(n-k)-1} d\tau \right\} d\eta, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $X(z) = \prod_{k=1}^n [(z - a_k)(z - b_k)]^{1/2}$, $P_{n-1}(x)$ — полином $(n-1)$ -й степени, коэффициенты которого определяются из условий $u(a_k) = u(b_k) = 0$. Располагая выражениями $u'_n(x)$, по формулам (6), (1) находим коэффициенты интенсивности напряжений.

В качестве примера рассмотрим полосу с одной теплоизолированной трещиной длины $2l$, когда грани полосы поддерживаются при постоянной температуре $\pm T_0$ и зажаты между двумя абсолютно жесткими гладкими основаниями. Основное температурное поле $t^* = \frac{T_0}{\delta} y$ не вызывает напряжений в сплошной полосе на линии расположения трещины. Производная

$\omega'(x)$, найденная описанным выше способом с учетом выражения для $t(x)$, приведенного в работе [3], имеет вид

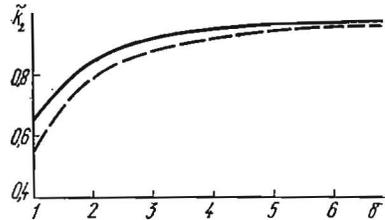
$$u'(x) = \frac{D_0 T_0}{\delta \sqrt{1-x^2}} \left\{ r_1(x) - \varepsilon_1 r_1(x) \delta^{-2} - \left[\varepsilon_4 r_1(x) + \varepsilon_2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} x^2 \right) - r_2(x) \right] \delta^{-4} - \left[\varepsilon_5 r_1(x) + \varepsilon_6 \left(\frac{1}{8} - r_2(x) \right) + \varepsilon_3 \left(\frac{1}{16} + \frac{x^2}{8} + r_2(x) \right) \right] \delta^{-6} + O(\delta^{-8}) \right\}. \quad (8)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \frac{1}{2} (c_k - a_k^2) \quad (k = 1, 2, 3); \quad \varepsilon_4 = -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} a_2^{(1)} + c_1 \varepsilon_1 \right); \\ \varepsilon_5 &= \frac{3}{4} \left(\frac{a_2^{(1)}}{2} - c_2 \right) \varepsilon_1 - \frac{5}{8} a_3^{(1)} + \frac{c_1^2}{8} (c_1 - 1) - \frac{3}{16} c_1 \varepsilon_2 - \frac{5}{16} a_3^{(2)}; \\ \varepsilon_6 &= -\frac{5}{4} a_3^{(1)} - \frac{1}{2} c_1 \varepsilon_3 + \frac{5}{2} \varepsilon_3; \\ r_1(x) &= \frac{1}{2} - x^2; \quad r_2(x) = \frac{x^4}{2} - x^6; \quad \delta = \frac{a}{l}; \\ c_1 &= 0,8225; \quad c_2 = -0,1353; \quad c_3 = 0,0318. \end{aligned}$$

Коэффициенты $a_k^{(i)}$, подсчитанные по формуле (5), равны соответственно $a_1^{(1)} = -1,2335$; $a_2^{(1)} = 0,3579$; $a_3^{(1)} = -0,1542$; $a_1^{(2)} = -0,4108$; $a_2^{(2)} = 0,1182$; $a_3^{(2)} = -0,0054$. Подставляя выражение (8) в формулу (1), находим

$$k_2^{(\pm 1)} = \pm \frac{E \alpha_l T_0 \sqrt{\pi l}}{4 \delta (1 - \chi)} \left\{ 1 - \varepsilon_1 \delta^{-2} - \left(\varepsilon_4 + \frac{3}{2} \varepsilon_2 \right) \delta^{-4} - \left(\varepsilon_4 + \frac{3}{4} \varepsilon_6 + \frac{5}{8} \varepsilon_3 \right) \delta^{-6} - O(\delta^{-8}) \right\}. \quad (9)$$



На рисунке сплошной линией представлена зависимость $\bar{k}_2 = \frac{4(1-\chi)\delta}{E\alpha_l T_0 \sqrt{\pi l}} k_2$ от относительной ширины полосы δ . При $\delta \rightarrow \infty$ k_2 быстро стремится к тому значению, которое имеет место для плоскости с трещиной. При $\delta = 4$ ошибка между соответствующими значениями k_2 меньше 4% и быстро уменьшается с ростом δ . Следует отметить, что величина k_2 для всех δ больше соответствующего значения k_2 в свободной от внешних усилий полосе с трещиной [3] (на рисунке эти значения нанесены штриховой линией).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М., Сметанин Б. И. О равновесных продольных трещинах в пластинках. — В кн.: Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М., 1966, с. 20—24.
2. Кит Г. С., Лысый И. П. Стационарное температурное поле в полосе и слое при смешанных граничных условиях. — ИФЖ, 1972, 22, № 1, с. 123—128.
3. Кит Г. С., Лысый И. П. Плоская и осесимметричная задача термоупругости для слоя с трещиной. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1975, вып. 1, с. 155—160.
4. Кит Г. С., Лысый И. П. Термоупругое состояние узкой полосы с трещиной. — Мат. методы и физ.-мех. поля, 1976, вып. 3, с. 26—29.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 13.02.78