УДК 534.1 : 531.221.3

М. Ф. Стасюк

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДВУХ ОБОБЩЕННЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим упругий, упруго защемленный стержень длиной l с двумя разнесенными массами на свободном конце, сжатый силой веса G и следящей силой H (рис. 1). Малые колебания такой системы около прямолинейной формы равновесия описываются следующей краевой задачей:

$$\begin{gathered}
EJ\,\frac{\partial^4 u(\xi,\,t)}{\partial\xi^4} + P\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial\xi^2} + m\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial t^2} = 0,\\
[u(\xi,\,t)]_{\xi=0} = 0,\\
\left[\frac{\partial u(\xi,\,t)}{\partial\xi} - \psi_0\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial\xi^2}\right]_{\xi=0} = 0,\\
\left[EJ\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial\xi^2} + \mu\rho^2\,\frac{\partial^3 u(\xi,\,t)}{\partial\xi\partial t^2}\right]_{\xi=l} = 0,\\
\left[EJ\,\frac{\partial^3 u(\xi,\,t)}{\partial\xi^2} + P(1-\eta)\,\frac{\partial u(\xi,\,t)}{\partial\xi} - \mu\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial t^2}\right]_{\xi=l} = 0.
\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь $P = G + H$; $\eta = \frac{H}{G+H}$; EJ — жесткость стержня на изгиб; m — его масса на единицу длины; μ — величина разнесенных масс; 2ρ — расстояние между ними; ψ_0 — параметр жесткости закрепления.

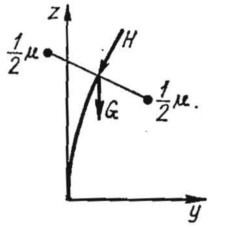

Рис. 1

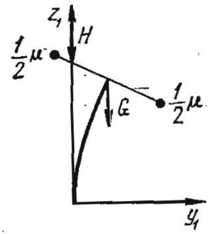

Рис. 2

Наряду с этой системой рассмотрим такой же стержень, но при наличии силы с фиксированной линией действия * (рис. 2). В этом случае соответствующая краевая задача имеет вид

$$\begin{gathered}
EJ\,\frac{\partial^4 u(\xi,\,t)}{\partial\xi^4} + P\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial\xi^2} + m\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial t^2} = 0,\\
[u(\xi,\,t)]_{\xi=0} = 0,\\
\left[\frac{\partial u(\xi,\,t)}{\partial\xi} - \psi_0\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial\xi^2}\right]_{\xi=0} = 0,\\
\left[EJ\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial\xi^2} + \mu\rho^2\,\frac{\partial^3 u(\xi,\,t)}{\partial\xi\partial t^2} + P\eta u(\xi,\,t)\right]_{\xi=l} = 0,\\
\left[EJ\,\frac{\partial^3 u(\xi,\,t)}{\partial\xi^3} + P\,\frac{\partial u(\xi,\,t)}{\partial\xi} - \mu\,\frac{\partial^2 u(\xi,\,t)}{\partial t^2}\right]_{\xi=l} = 0.
\end{gathered}\tag{2}$$

Будем искать характеристические уравнения для задач (1) и (2). Производя замену $x = \frac{\xi}{l}$ и разделяя переменные, приходим соответственно к таким обобщенным задачам на собственные значения:

$$\begin{gathered}
y^{\mathrm{IV}}(x) + py''(x) + h^2 y(x) = 0,\\
y(0) = 0,\\
y'(0) - \psi y''(0) = 0,\\
y''(1) + r_1 r_2 h^2 y'(1) = 0,\\
y'''(1) + p(1-\eta)\,y'(1) - r_2 h^2 y(1) = 0
\end{gathered}\tag{1'}$$

* Частные случаи задачи для рассматриваемых систем исследованы в работах [1, 2]

и

$$
\begin{gathered}
y^{\mathrm{IV}}(x) + py''(x) + h^2 y(x) = 0, \\
y(0) = 0, \\
y'(0) - \psi y''(0) = 0, \\
y''(1) + r_1 r_2 h^2 y'(1) + p\eta y(1) = 0, \\
y'''(1) + py'(1) - r_2 h^2 y(1) = 0.
\end{gathered}
\tag{2'}
$$

Здесь $p = \frac{G+H}{EJ} l^2$; $\eta = \frac{H}{G+H}$; $h^2 = \frac{ml^4}{EJ}\omega^2$; $r_1 = \frac{\rho^2}{l^2}$; $r_2 = \frac{\mu}{ml}$; $\psi = \frac{\psi_0}{l}$.

Используя результаты работы [3], находим характеристические уравнения рассматриваемых задач в виде

$$
\begin{gathered}
[F_0 - p(1-\eta)F_2] + r_2 h^2 [r_1 F_2 + F_4] + r_1 r_2 h^4 F_4 + \\
+ \psi \{F_0 - p(1-\eta)F_2' + r_2 h^2 [r_1 F_2' + F_4''] + r_1 r_2^2 h^4 F_4'\}|_{x=l} = 0
\end{gathered}
\tag{3}
$$

и

$$
\begin{gathered}
[F_0 - pF_2 + p\eta(F_4'' - F_2) + p^2\eta F_4] + r_2 h^2 [r_1 F_2' + F_4'] + \\
+ r_1 r_2^2 h^4 F_4 + \psi\{[F_0' - pF_2' + p\eta(F_4''' - F_2') + p^2\eta F_4'] + \\
+ r_2 h^2 [r_1 F_2'' + F_4''] + r_1 r_2 h^4 F_4'\}|_{x=l} = 0,
\end{gathered}
\tag{4}
$$

где $F_{2s} = [\varphi^{(3-s)}]^2 - \varphi^{(2-s)}\varphi^{(4-s)}$ $(s = 1, 2, 3)$, а φ, φ', φ'', φ''' — фундаментальная система решений уравнения из (1′) или (2′). Учитывая тождество $F_2 = \frac{1}{2}(F_4'' + pF_4)$, нетрудно преобразовать уравнение (4) к виду (3), откуда непосредственно следует эквивалентность задач (1) и (2) в смысле малых колебаний и устойчивости (совпадение частот, критических значений параметров при эйлеровой и автоколебательной потерях устойчивости).

Отметим, что для случая $\psi = 0$, $\mu = 0$, $\eta = 1$ (жестко закрепленная консоль с равномерно распределенной массой при отсутствии силы G) соответствующий результат доказан Э. Л. Позняком (см. [1]), для безмассового стержня — системы с двумя степенями свободы при наличии трения — Л. М. Зорием в работе [2].

Отметим, что задачи (1′) и (2′) принадлежат классу недостаточно исследованных обобщенных задач с параметром частоты в уравнении и в краевых условиях. Некоторые общие результаты для таких задач установлены Я. Д. Тамаркиным в работе [4]. Используя понятие сопряженности [4], можно показать, что задачи (1′) и (2′) (а следовательно, (1) и (2)) сопряжены. Это имеет место и в случае, когда $m = m(\xi)$ и является непрерывной достаточно гладкой функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости.— М.: Физматгиз, 1961.— 339 с.
2. *Зорий Л. М.* Об устойчивости стержня при неконсервативной нагрузке.— Вопр. машиноведения и прочности в машиностроении, 1964, вып. 9, с. 23—34.
3. *Зорій Л. М.* Про одне зображення характеристичних рівнянь деяких задач для систем з розподіленими параметрами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 12, с. 1072—1075.
4. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.— Пг., 1917.— 307 с.

Вычислительный центр
Института прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
23.08.77