6. *Шульман С. Г.* Некоторые случаи свободных колебаний пластинок и цилиндрических оболочек, соприкасающихся с жидкостью.— В кн.: Тр. VI Всесоюз. конф. по теории пластинок и оболочек. Баку; М. : Наука, 1966, с. 853—858.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
02.01.78

УДК 534.1 : 531.221.3

Б. Я. Андриюк, Р. М. Таций

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

В настоящей работе предложен способ построения последовательностей двусторонних оценок собственных значений оператора Лапласа для односвязных областей сложной формы, основанный на полученных ранее [2] представлениях соответствующих характеристических определителей в виде произведения рядов.

Рассмотрим граничную задачу

$$\Delta\tilde{U} + \lambda^2\tilde{U} = 0, \quad \tilde{U}\,|_\Gamma = 0, \tag{1}$$

где Γ — кусочно-гладкая граница односвязной области G комплексной плоскости W ($W = x + iy$). Пусть на эту область конформно отображается единичный круг некоторой другой комплексной плоскости Z с помощью аналитической функции $W = W(z)$ ($W(0) = 0$, $W'(0) > 0$). Тогда задача (1) эквивалентна задаче на собственные значения для единичного круга

$$\Delta U + \lambda\,|W'|^2 U = 0, \quad U\,|_{\rho=1} = 0 \quad (\rho = |z|). \tag{2}$$

При дополнительном предположении $\overline{W(z)} = W(\bar{z})$ (область G симметрична относительно действительной оси) в работе [2] получены две бесконечные совокупности характеристических уравнений

$$C_n(\lambda) = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{3}$$

$$S_n(\lambda) = 0, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{4}$$

для симметричных и антисимметричных форм соответственно. Можно показать, что в общем случае (область G не имеет осей симметрии) получим одну бесконечную совокупность характеристических уравнений

$$D_n(\lambda) = 0, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{5}$$

При этом каждая из функций $D_n(\lambda)$, будучи целой аналитической функцией рода нуль, допускает представление в виде ряда

$$D_n(\lambda) = 1 - A_1^{(n)}\lambda^2 + A_2^{(n)}\lambda^4 - \cdots \tag{6}$$

На основании известных результатов [1] отсюда непосредственно вытекает, что величина

$$B_\nu^{(n)} = \sum_{i=i}^{\nu-1} (-1)^{i+1} A_i^{(n)} B_{\nu-i}^{(n)} + (-1)^{\nu+1}\,\nu A_\nu^{(n)} \tag{7}$$

$$(B_1^{(n)} = A_1^{(n)})$$

есть сумма ν-х степеней обратных величин нулей функции $D_n(\lambda)$.

Очевидно, что выражение

$$B_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} B_\nu^{(n)} \tag{8}$$

представляет собой сумму ν-х степеней обратных величин всех собственных значений задачи (2) (будем обозначать их через λ_i^2), т. е.

$$B_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^{2\nu}}. \tag{9}$$

Следует отметить, что этот ряд сходится лишь начиная с $\nu = 2$, поскольку след ядра соответствующего интегрального оператора, который должен совпадать с равенством (8) при $\nu = 1$, не существует. К задаче (2) можно непосредственно применить, например, метод Галеркина, получив таким образом приближения сверху к λ_i^2. Используя эти приближения, а также величину B_ν при определенном значении $\nu \geqslant 2$, строим последовательность оценок снизу для соответствующих собственных значений λ_k^2. Введем следующие обозначения. Пусть λ_{in}^2 — n-е приближение сверху к собственному значению λ_i^2 $(i \leqslant n)$; r — радиус вписанного в область G круга; λ_{i0}^2 — собственные значения задачи (1) для единичного круга; $B_{\nu n} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{in}^2}$. Учитывая, что $\lambda_i^2 \leqslant \lambda_{in}^2$, $\lambda_i^2 \leqslant \frac{\lambda_{i0}^2}{r^2}$, получаем

$$\frac{1}{\lambda_k^{2\nu}} - \frac{1}{\lambda_{kn}^{2\nu}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^{2\nu}} - B_{\nu n} = B_\nu - B_{\nu n} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^{2\nu}} \leqslant$$

$$\leqslant B_\nu - B_{\nu n} - r^{2\nu} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i0}^{2\nu}} \tag{10}$$

или

$$\tau_{kn}^2 \equiv \left(B_\nu - B_{\nu n} - r^{2\nu} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i0}^{2\nu}} + \frac{1}{\lambda_{kn}^{2\nu}} \right)^{-\frac{1}{\nu}} \leqslant \lambda_k^2. \tag{11}$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{kn}^2 = \lambda_k^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i0}^{2\nu}} = 0$, а также (см., например, [3, с. 360]) $\lim\limits_{n\to\infty} (B_\nu - B_{\nu n}) = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_{kn}^2 = \lambda_k^2$, и мы имеем последовательность двусторонних оценок собственных значений задачи (1):

$$\tau_{kn}^2 \leqslant \lambda_k^2 \leqslant \lambda_{kn}^2. \tag{12}$$

В отличие от подхода Фикера [5] наш способ построения величины B_ν не требует нахождения интегрированных ядер. С другой стороны, наличие в выражении для τ_{kn}^2 члена $\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i0}^{2\nu}}$ делает оценки (12) точными. Действительно, в оценках (12) достигаются знаки равенства с обеих сторон, если область G — круг и при реализации метода Галеркина за координатную последовательность взята последовательность собственных функций для круга.

Если коэффициенты разложения отображающей функции действительны, то нахождение чисел B_ν для симметричных и антисимметричных форм ($B_{\nu c}$ и $B_{\nu s}$ соответственно) можно проводить независимо. В примере, который приводится ниже, эта возможность будет существенно использована.

Пусть область G — семейство улиток Паскаля, так что [4] $W = R(z + \beta z^2)$, $R > 0$, $0 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{2}$. Используя схему [2] и формулу (7), для симметричных форм получаем

$$B_2^{(0)} = \frac{R^4}{16}\left(\frac{1}{2} + 2\beta^2 + \frac{\beta^4}{2}\right),$$

Таблица 1

β	λ_{1c}^2		λ_{2c}^2	
0,1	5,6703	5,6712	14,6705	14,6819
0,2	5,3676	5,3724	14,5865	14,6800
0,3	4,9563	4,9659	14,2134	14,4373
0,4	4,4382	4,5222	11,8430	13,7858
0,5	3,9805	4,0870	9,9980	12,8737

Таблица 2

β	λ_{1s}^2		λ_{2s}^2	
0,1	14,2541	14,2619	25,8615	25,8722
0,2	13,1790	13,1971	24,0031	24,3814
0,3	11,6519	11,8418	21,9989	22,2736
0,4	9,5717	10,4789	19,2231	19,8270
0,5	8,7214	9,2205	15,9200	16,5346

$$B_2^{(1)} = \frac{R^4}{16}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{9}\beta^2 + \frac{8}{45}\beta^4\right), \tag{13}$$

$$B_{2n} = A_1^{(n)2} - 2A_2^{(n)}, \qquad n = 2,\ 3,\ \ldots,$$

где

$$A_1^{(n)} = \frac{R^2}{4}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{2\beta^2}{n+2}\right);$$

$$A_2^{(n)} = \frac{R^4}{16}\left[\frac{1}{2(n+1)(n+2)} + \frac{2\beta^2}{(n+1)(n+3)} + \frac{2\beta^2}{(n+2)^2} + \frac{2\beta^4}{(n+2)(n+4)}\right].$$

Число B_{2c} определяется через найденные величины с помощью формулы (8):

$$B_{2c} = \frac{R^4}{16}\left[\frac{\pi^2}{6} - 1 + \left(\frac{2}{5}\pi^2 - \frac{25}{6}\right)\beta^2 + \left(\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{17}{3}\right)\beta^4\right]. \tag{14}$$

Проводя аналогичные подсчеты для антисимметричных форм, находим

$$B_{2s} = \frac{R^4}{16}\left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2} + \left(\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{35}{6}\right)\beta^2 + \left(\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{111}{18}\right)\beta^4\right]. \tag{15}$$

В частности, для единичного круга ($\beta = 0$, $R = 1$)

$$B_{2c} = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right), \quad B_{2s} = \frac{1}{16}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{3}{2}\right). \tag{16}$$

Последние две формулы используются в оценках (12) и могут быть независимо получены из разложений в ряды функций Бесселя первого рода.

Двусторонние оценки первых двух собственных значений для симметричных (λ_{1c}^2 и λ_{2c}^2) и антисимметричных (λ_{1s}^2, λ_{2s}^2) форм приведены в табл. 1 и 2. Вычисления произведены с десятью пробными функциями для каждого из двух видов форм, причем в качестве минимизирующей последовательности взяты известные собственные функции для единичного круга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бернштейн С. А., Кероннн К. К.* Определение частот колебаний стержневых систем методом спектральной функции.— М. : Госстройиздат, 1960.— 281 с.
2. *Зорій Л. М., Тацій Р. М.* Дослідження коливань і стійкості пружних пластинок довільної форми.— Доп. АН УРСР, 1974, вип. 2, с. 154.
3. *Михлин С. П.* Вариационные методы в математической физике.— М. : Наука, 1970.— 510 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М. : Изд-во АН СССР, 1949.— 300 с.
5. *Fichera G.* Appraximations and estimates for eigen values, Vortr, d. 3.— In: Fagung über Probl. und Method. d. Math. Phys. Techn. hogesch. Karl.-Marx-Stadt, 1966, H. 1, S. 60—98

Вычислительный центр
Института прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
01.12.77