Аналогично получаем оценку сверху для $Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}}$:

$$Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} \leqslant \beta_{2k} + \beta_{2k+2} + \cdots + \beta_{2p}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=2}^{2p+1} \delta_k(p) = \sum_{k=1}^{p} [\max_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+1}} (b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} Q^{(2p+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+1}}) + \max_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} (b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1}} Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}})] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} [\beta_{2k} (\beta_{2k+1} + \beta_{2k+3} + \cdots + \beta_{2p+1}) + \beta_{2k-1} (\beta_{2k} + \beta_{2k+2} + \cdots \beta_{2p})].$$

Из условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty$ следует существование константы $K$, что

$$\beta_{2k+1} + \beta_{2k+3} + \cdots + \beta_{2p+1} \leqslant K, \ \beta_{2k} + \beta_{2k+2} + \cdots + \beta_{2p} \leqslant K,$$

и поэтому

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \sum_{k=2}^{2p+1} \delta_k(p) \leqslant K \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty.$$

Таким образом, доказана такая теорема.

**Теорема.** Ветвящаяся цепная дробь (1) с положительными частными знаменателями $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ $(1 \leqslant i_k \leqslant N; \ k = 1, 2, \ldots)$ расходится, если ряд $\Sigma\beta_k$ сходится, где

$$\beta_k = \max_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$$

обозначает максимальный член дроби (1) на $k$-м этаже.


СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боднар Д. И., Олексив И. Я.* О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами.— Укр. мат. журн., 1976, 28, № 3, с. 373—377.
2. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування.— К. : Наук. думка, 1974.— 272 с.



Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР



Поступила в редколлегию
10.02.78



УДК 539.3 : 518.0



*О. Г. Сторож*


## ПРИВЕДЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИИ УПРУГИХ ПЛАСТИН В ЖИДКОСТИ К КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Изучению взаимодействия жидкостей с тонкими пластинками и оболочками посвящен ряд работ, например [1, 4—6]. В настоящей работе рассматривается расположенная в плоскости $z = 0$ балочная плита конечной длины $l = b - a$, имеющая неограниченные размеры в направлении, перпендикулярном к плоскости $xz$ $(|y| < \infty)$, и находящаяся под слоем идеальной несжимаемой жидкости, занимающей объем $0 \leqslant x \leqslant c$, $|y| < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant h$ $(0 \leqslant a < b \leqslant c)$. Считаем, что внешняя нагрузка отсутствует, движение жидкости является плоским и происходит в плоскости $xz$. Тогда при определенных предположениях (подробнее см. в работах [1, 6]) задачу о колебании системы балка — жидкость можно свести к плоской. Дифференциальное уравнение упругих поперечных колебаний балки имеет вид

$$EJ\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+m\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=\rho\frac{\partial\Phi(x,\ 0,\ t)}{\partial t},\quad a\leqslant x\leqslant b, \tag{1}$$

где $EJ$, $m$, $W(x, t)$ — жесткость, погонная масса, поперечный прогиб балки соответственно; $\rho$, $\Phi(x, z, t)$ — плотность и потенциал скоростей жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа во всем объеме, занимаемом жидкостью;

$$\Delta\Phi\equiv\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0. \tag{2}$$

Считая поверхность $z=h$ свободной, а боковые стенки и дно вне балки жесткими и предполагая отсутствие отрыва жидкого объема от балки в процессе ее движения, получаем граничные условия

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(x,\ h,\ t)=0,\qquad 0\leqslant x\leqslant c, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\x=c}}=0,\qquad 0\leqslant z\leqslant h, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0}=H(x)\frac{\partial W}{\partial t},\qquad 0\leqslant x\leqslant c, \tag{5}$$

где

$$H(x)=\begin{cases}0,\ 0\leqslant x<a, & b<x\leqslant c,\\ 1,\ a\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$

Кроме того, предполагаем, что в начальный момент времени балка находится в положении равновесия, т. е.

$$W(x,\ 0)=0,\qquad a\leqslant x\leqslant b, \tag{6}$$

и что функция $W$ удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$W(a,\ t)+k_1\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(a,\ t)=0,\qquad k_1\geqslant 0, \tag{7}$$

$$W(b,\ t)-k_2\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(b,\ t)=0,\qquad k_2\geqslant 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(a,\ t)-\chi_1\frac{\partial W}{\partial x}(a,\ t)=0,\qquad \chi_1\geqslant 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(b,\ t)+\chi_2\frac{\partial W}{\partial x}(b,\ t)=0,\qquad \chi_2\geqslant 0. \tag{10}$$

Предположим, что

$$\begin{gathered}\Phi(x,\ z,\ t)=\varphi(x,\ z)\,\psi(t),\\ W(x,\ t)=w(x)\,\mu(t)\end{gathered} \tag{11}$$

является решением системы (1) — (10). Нетрудно показать, что, как и в случае, рассмотренном в работе [5] (с точностью до постоянного множителя),

$$\psi(t)=\cos\lambda t,\quad \mu(t)=\sin\lambda t, \tag{12}$$

где $\lambda$ — комплексное число. Очевидно, что при $\lambda=0$ система (1) — (10) имеет бесконечное число линейно независимых решений, но при этом $W=0$, т. е. балка остается неподвижной. Поэтому в дальнейшем рассматривается случай, когда $\lambda\neq 0$.

Подставляя равенства (11) в систему уравнений (1) — (10) и учитывая равенства (12), получаем

$$EJw^{(IV)}(x) - \lambda^2 mW(x) + \lambda\rho\varphi(x, 0) = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\x=c}} = 0, \quad \varphi(x, h) = 0, \tag{15}$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0} = \lambda H(x) w(x), \tag{16}$$

$$w(a) + k_1 w'''(a) = 0, \tag{17}$$

$$w(b) - k_2 w'''(b) = 0, \tag{18}$$

$$w''(a) - \chi_1 w'(a) = 0, \tag{19}$$

$$w''(b) + \chi_2 w'(b) = 0. \tag{20}$$

Рассмотрим теперь в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$ (самосопряженные) операторы $L$ — порожденный краевыми условиями (17) — (20) и дифференциальным выражением $Lw = w^{(IV)}$ — и $M$ — порожденный дифференциальным выражением $Mw = -w''$ и краевыми условиями $w'(a) = w'(b) = 0$. Решая задачу (14) — (16) методом разделения переменных, находим

$$\varphi(x, 0) = -\lambda g(M) Hw(x), \tag{21}$$

где

$$g(\xi) = \frac{\operatorname{th}(h\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}}, \quad 0 < \xi < \infty;$$

$g(M)$ понимается в смысле функционального исчисления операторов [2] $H$ — оператор умножения на функцию $H(x)$, действующий из пространства $L_2(a, b)$ в $L_2(0, c)$. Учитывая равенство (21) и определение оператора $L$, задачу (13), (17) — (20) можно записать в операторной форме следующим образом:

$$EJLw = \lambda^2(\rho H^* g(M) Hw + mw), \tag{22}$$

где $H^*$ — действующий из $L_2(0, c)$ в $L_2(a, b)$ оператор сужения функции на промежуток $(a, b)$ (очевидно, что $H$ и $H^*$ — взаимно сопряженные).

Так как $g(M)$ — самосопряженный положительно определенный оператор (доказательство этого факта и соотношения (21) производится так же, как и в случае, рассмотренном в работе [5]), а $L > 0$ и $L^{-1}$ — вполне непрерывный, то исходная задача сведена к классической [3]. В частности, все собственные значения этой задачи положительные, образуют счетное множество с единственной предельной точкой на бесконечности, собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны с весом $L$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гершунов Е. М.* Присоединенная масса жидкости при колебаниях балки, лежащей под слоем жидкости.— Прикл. механика, 1974, **10**, вып. 3, с. 109—116.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы : Спектр. теория.— М. : Мир., 1966.— 1063 с.
3. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения.— М. : Наука, 1968.— 503 с.
4. *Підстригач Я. С.* Про один випадок ускладнення граничних умов в задачах гідропружності.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1975, № 3, с. 235—238.
5. *Сторож О. Г.* Про зведення деяких задач гідродинаміки до класичних крайових задач.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 4, с. 345—347.

6. *Шульман С. Г.* Некоторые случаи свободных колебаний пластинок и цилиндрических оболочек, соприкасающихся с жидкостью.— В кн.: Тр. VI Всесоюз. конф. по теории пластинок и оболочек. Баку; М. : Наука, 1966, с. 853—858.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 02.01.78

УДК 534.1 : 531.221.3

*Б. Я. Андриюк, Р. М. Таций*

## ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА В ОБЛАСТЯХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

В настоящей работе предложен способ построения последовательностей двусторонних оценок собственных значений оператора Лапласа для односвязных областей сложной формы, основанный на полученных ранее [2] представлениях соответствующих характеристических определителей в виде произведения рядов.

Рассмотрим граничную задачу

$$\Delta\tilde{U} + \lambda^2\tilde{U} = 0, \quad \tilde{U}\,|_\Gamma = 0, \tag{1}$$

где $\Gamma$ — кусочно-гладкая граница односвязной области $G$ комплексной плоскости $W$ ($W = x + iy$). Пусть на эту область конформно отображается единичный круг некоторой другой комплексной плоскости $Z$ с помощью аналитической функции $W = W(z)$ ($W(0) = 0$, $W'(0) > 0$). Тогда задача (1) эквивалентна задаче на собственные значения для единичного круга

$$\Delta U + \lambda\,|W'|^2 U = 0, \; U\,|_{\rho=1} = 0 \quad (\rho = |z|). \tag{2}$$

При дополнительном предположении $\overline{W(z)} = W(\bar{z})$ (область $G$ симметрична относительно действительной оси) в работе [2] получены две бесконечные совокупности характеристических уравнений

$$C_n(\lambda) = 0, \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

$$S_n(\lambda) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

для симметричных и антисимметричных форм соответственно. Можно показать, что в общем случае (область $G$ не имеет осей симметрии) получим одну бесконечную совокупность характеристических уравнений

$$D_n(\lambda) = 0, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

При этом каждая из функций $D_n(\lambda)$, будучи целой аналитической функцией рода нуль, допускает представление в виде ряда

$$D_n(\lambda) = 1 - A_1^{(n)}\lambda^2 + A_2^{(n)}\lambda^4 - \cdots \tag{6}$$

На основании известных результатов [1] отсюда непосредственно вытекает, что величина

$$B_\nu^{(n)} = \sum_{i=i}^{\nu-1} (-1)^{i+1} A_i^{(n)} B_{\nu-i}^{(n)} + (-1)^{\nu+1}\,\nu A_\nu^{(n)} \tag{7}$$

$$(B_1^{(n)} = A_1^{(n)})$$

есть сумма $\nu$-х степеней обратных величин нулей функции $D_n(\lambda)$.

Очевидно, что выражение

$$B_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} B_\nu^{(n)} \tag{8}$$