получаем соотношение (9) и, следовательно, $H(\alpha_k) G'(\alpha_k) = 2i(\alpha_k + i)^{2(n-1)} \times p(z_k) q'(z_k)$. Представление (6) установлено. Отметим, что матрицы, фигурирующие в представлении (6), просто записываются через коэффициенты исходного многочлена, если воспользоваться соотношениями (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задачна собственные значения : Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1972.— 113 с.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.— М. : Наука, 1976.— 368 с.
3. *Крейн М. Г., Неймарк М. Ю.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений.— Харьков : Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1936.— 43 с.
4. *Ландер Ф. И.* Безутианта и обращение ганкелевых и теплицевых матриц.— Мат. исслед., 1974, **9**, № 2, с. 173—179.
5. *Подстригач Я. С., Балинский А. И., Зорий Л. М.* Один критерий устойчивости полиномов.— Докл. АН СССР, 1974, **219**, № **3**, с. 553—554.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.02.78

УДК 517.52

Д. И. Боднар

НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

Рассмотрим числовые ветвящиеся цепные дроби с положительными частными знаменателями вида

$$\alpha = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{1}{b_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{1}{b_{i_1 i_2} + \cdots}}$$

или с использованием других более компактных обозначений

$$\alpha = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1\,|}{|\,b_{i_1}} + \sum_{i_2=1}^{N} \frac{1\,|}{|\,b_{i_1 i_2}} + \cdots + \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1\,|}{|\,b_{i_1 i_2 \ldots i_k}} + \cdots \tag{1}$$

Пусть

$$Q^{(p)}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \stackrel{\text{df}}{=} b_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{1\,|}{|\,b_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}}} + \cdots + \sum_{i_p=1}^{N} \frac{1\,|}{|\,b_{i_1 i_2 \ldots i_p}} \tag{2}$$

$$|k = \overline{1, p}; \quad p = 1, 2, \ldots|.$$

Тогда для разности двух соседних подходящих дробей ветвящейся цепной дроби (1) легко установить формулу [1]

$$\frac{P_{2p+1}}{Q_{2p+1}} - \frac{P_{2p}}{Q_{2p}} = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \cdots \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{2p+1} Q^{(2p+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \prod\limits_{k=1}^{2p} Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_k}}. \tag{3}$$

Перегруппировывая множители в знаменателях правой части равенства (3), получаем

$$\frac{P_{2p+1}}{Q_{2p+1}} - \frac{P_{2p}}{Q_{2p}} = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \cdots \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{1}{Q^{(2p+1)}_{i_1} \prod\limits_{k=1}^{p} \left(Q^{(2p+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} Q^{(2p+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+1}}\right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{k=1}^{p} (Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1}} Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}})} = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \cdots \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{1}{Q^{(2p+1)}_{i_1}} \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{k=1}^{p} \left(b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} Q^{(2p+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+1}} + \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q^{(2p+1)}_{i_1 \ldots i_{2k} i_{2k+1}}}{Q^{(2p+1)}_{i_1 \ldots i_{2k} \tau}} \right) \prod_{k=1}^{p} \left(b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1}} Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} + \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k-1} i_{2k}}}{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k-1} \tau}} \right)}.$$

Для упрощения записей используем сокращенные обозначения

$$\delta_{2k+1} = \max_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+1}} (b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} Q^{(2p+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+1}}),$$

$$\delta_{2k} = \max_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} (b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1}} Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}}),$$

$$M_{i_1 i_2 \ldots i_{2r}} = Q^{(2p+1)}_{i_1} \prod_{k=1}^{r-1} \left(\delta_{2k+1} + \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q^{(2p+1)}_{i_1 \ldots i_{2k} i_{2k+1}}}{Q^{(2p+1)}_{i_1 \ldots i_{2k} \tau}} \right) \prod_{k=1}^{r} \left(\delta_{2k} + \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k-1} i_{2k}}}{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k-1} \tau}} \right),$$

$$M_{i_1 i_2 \ldots i_{2r+1}} = Q^{(2p+1)}_{i_1} \prod_{k=1}^{r} \left(\delta_{2k+1} + \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q^{(2p+1)}_{i_1 \ldots i_{2k} i_{2k+1}}}{Q^{(2p+1)}_{i_1 \ldots i_{2k} \tau}} \right) \prod_{k=1}^{r} \left(\delta_{2k} + \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k-1} i_{2k}}}{Q^{(2p)}_{i_1 \ldots i_{2k-1} \tau}} \right)$$

$$(k = \overline{1, p}; \quad r = \overline{1, p}).$$

Тогда

$$\frac{P_{2p+1}}{Q_{2p+1}} - \frac{P_{2p}}{Q_{2p}} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \cdots \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{1}{M_{i_1 i_2 \ldots i_{2p}}} \left(\sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{1}{\delta_{2p+1} + \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q^{(2p+1)}_{i_1 \ldots i_{2p} i_{2p+1}}}{Q^{(2p+1)}_{i_1 \ldots i_{2p} \tau}}} \right).$$

Оценка снизу выражения

$$\sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \left(\delta_{2p+1} + \sum_{\tau=1}^{N} \frac{Q^{(2p+1)}_{i_1 \ldots i_{2p} i_{2p+1}}}{Q^{(2p+1)}_{i_1 \ldots i_{2p} \tau}} \right)^{-1}$$

производится на основании такой леммы.

Лемма. Для произвольных положительных δ, x_i справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\delta + \sum_{j=1}^{n} \frac{x_i}{x_j} \right)^{-1} \geqslant (\delta + 1)^{-1}. \tag{4}$$

Доказательство. Используем метод полной математической индукции. При $n = 1$ неравенство (4) выполняется тривиальным образом. Если $n = 2$, то неравенство

$$\left(1 + \delta + \frac{x_1}{x_2}\right)^{-1} + \left(1 + \delta + \frac{x_2}{x_1}\right)^{-1} \geqslant (\delta + 1)^{-1}$$

проверяется непосредственно и после соответствующих сокращений сводится к очевидному неравенству $2\delta + \delta^2 \geqslant 0$. Пусть неравенство (4) справедливо для $n = k - 1$. Докажем его справедливость для $n = k$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\delta + \sum_{j=1}^{k}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{k-2}\left(\delta + \sum_{j=1}^{k-2}\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_i}{\tilde{x}_{k-1}}\right)^{-1} +$$

$$+\left(\delta + \sum_{j=1}^{k-2}\frac{x_{k-1}}{x_j} + 1 + \frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{-1} + \left(\delta + \sum_{j=1}^{k-2}\frac{x_k}{x_j} + \frac{x_k}{x_{k-1}} + 1\right)^{-1},$$

где $\tilde{x}_{k-1}^{-1} = x_{k-1}^{-1} + x_k^{-1}$, т. е. $\tilde{x}_{k-1} = \dfrac{x_{k-1}x_k}{x_{k-1} + x_k}$.

Непосредственной проверкой легко устанавливается неравенство

$$\left(1 + \delta + Ax + \frac{x}{y}\right)^{-1} + \left(1 + \delta + Ay + \frac{y}{x}\right)^{-1} \geqslant \left(1 + \delta + A\,\frac{xy}{x+y}\right)^{-1}, \quad (5)$$

справедливое для произвольных положительных δ, x, y, A, так как оно после соответствующих преобразований и сокращений сводится к очевидному неравенству

$$2\delta + \delta^2 + 2\delta A\,\frac{xy}{x+y} \geqslant 0.$$

Используя неравенство (5), где $A = \sum\limits_{j=1}^{k-2} x_j^{-1}$, $x = x_{k-1}$, $y = x_k$, получаем

$$\left(1 + \delta + \sum_{j=1}^{k-2}\frac{x_{k-1}}{x_j} + \frac{x_{k-1}}{x_k}\right)^{-1} + \left(1 + \delta + \sum_{j=1}^{k-2}\frac{x_k}{x_j} + \frac{x_k}{x_{k-1}}\right)^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\delta + \sum_{j=1}^{k-2}\frac{\tilde{x}_{k-1}}{x_j} + \frac{\tilde{x}_{k-1}}{\tilde{x}_{k-1}}\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\delta + \sum_{j=1}^{k}\frac{x_i}{x_j}\right)^{-1} \geqslant \sum_{i=1}^{k-2}\left(\delta + \sum_{j=1}^{k-2}\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_i}{\tilde{x}_{k-1}}\right)^{-1} +$$

$$+\left(\delta + \sum_{j=1}^{k-2}\frac{\tilde{x}_{k-1}}{x_j} + 1\right)^{-1} \geqslant (\delta + 1)^{-1}$$

согласно предположению индукции для чисел $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, ..., $y_{k-2} = x_{k-2}$, $y_{k-1} = \tilde{x}_{k-1}$. Лемма доказана.

Таким образом,

$$\sum_{i_{2p+1}=1}^{N}\left(\delta_{2p+1} + \sum_{\tau=1}^{N}\frac{Q^{(2p+1)}_{i_1\ldots i_{2p}i_{2p+1}}}{Q^{(2p+1)}_{i_1\ldots i_{2p}\tau}}\right)^{-1} \geqslant (\delta_{2p+1} + 1)^{-1}$$

и

$$\frac{P_{2p+1}}{Q_{2p+1}} - \frac{P_{2p}}{Q_{2p}} \geqslant \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{N}\cdots\sum_{i_{2p}=1}^{N}\frac{1}{M_{i_1i_2\ldots i_{2p}}(1 + \delta_{2p+1})} =$$

$$= \frac{1}{1 + \delta_{2p+1}}\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{N}\cdots\sum_{i_{2p-1}=1}^{N}\frac{1}{M_{i_1i_2\ldots i_{2p-1}}}\left(\sum_{i_{2p}=1}^{N}\frac{1}{\delta_{2p} + \sum\limits_{\tau=1}^{N}\dfrac{Q^{(2p)}_{i_1\ldots i_{2p-1}i_{2p}}}{Q^{(2p)}_{i_1\ldots i_{2p-1}\tau}}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(1+\delta_{2p+1})(1+\delta_{2p})} \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \cdots \sum_{i_{2p-1}=1}^{N} \frac{1}{M_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1}}} \geqslant \cdots \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{Q_{i_1}^{(2p+1)}} \prod_{k=2}^{2p+1} (1+\delta_k)^{-1} \geqslant C \prod_{k=2}^{2p+1} (1+\delta_k)^{-1},$$

где C — произвольная положительная константа такая, что

$$C \leqslant \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{Q_{i_1}^{(2p+1)}} = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1 \mid}{\mid b_{i_1}} + \sum_{i_2=1}^{N} \frac{1 \mid}{\mid b_{i_1 i_2}} + \cdots + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{1 \quad \mid}{\mid b_{i_1 i_2 \ldots i_{2p+1}}}.$$

Из свойства «вилки» [2] следует, что такая константа существует и для $p \geqslant 1$, в частности, можно взять

$$C = \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1}{b_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \frac{1}{b_{i_1 i_2}}}.$$

Так как δ_k, вообще говоря, зависит от p, то всюду следует писать $\delta_k(p)$ вместо δ_k (мы этого пока не делали только с целью сокращения записи).

Используя очевидное неравенство $1 + \delta \leqslant \exp(\delta)$ $(\delta \geqslant 0)$, получаем

$$\prod_{k=2}^{2p+1} [1 + \delta_k(p)] \leqslant \exp\left(\sum_{k=2}^{2p+1} \delta_k(p)\right).$$

Поэтому если предположить, что $\varlimsup\limits_{p\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{2p+1} \delta_k(p) < \infty$, то отсюда сразу заключаем, что $\varlimsup\limits_{p\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{2p+1} [1 + \delta_k(p)] < \infty$ и, следовательно, дробь (1) расходится.

Пусть $\beta_k = \max\limits_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ — максимальный элемент на k-м этаже ветвящейся цепной дроби (1) и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty$. Тогда, учитывая свойство «вилки», получаем

$$Q_{i_1 i_2 \ldots i_{2p+1}}^{(2p+1)} = b_{i_1 i_2 \ldots i_{2p+1}} \leqslant \beta_{2p+1},$$

$$Q_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1}}^{(2p+1)} = b_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1}} + \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{1 \mid}{\mid b_{i_1 i_2 \ldots i_{2p}}} + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{1 \quad \mid}{\mid b_{i_1 i_2 \ldots i_{2p+1}}} \leqslant$$

$$\leqslant \beta_{2p-1} + \sum_{i_{2p}=1}^{N} \frac{1 \mid}{\mid 0} + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{1 \mid}{\mid \beta_{2p+1}} = \beta_{2p-1} + \beta_{2p+1},$$

$$Q_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+1}}^{(2p+1)} = b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+1}} + \sum_{i_{2k+2}=1}^{N} \frac{1 \quad \mid}{\mid b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+2}}} + \sum_{i_{2k+3}=1}^{N} \frac{1 \quad \mid}{\mid b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+3}}} +$$

$$+ \sum_{i_{2k+4}=1}^{N} \frac{1 \quad \mid}{\mid b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+4}}} + \cdots + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{1 \quad \mid}{\mid b_{i_1 i_2 \ldots i_{2p+1}}} \leqslant \beta_{2k+1} + \sum_{i_{2k+2}}^{N} \frac{1 \mid}{\mid 0} +$$

$$+ \sum_{i_{2k+3}=1}^{N} \frac{1 \mid}{\mid \beta_{2k+3}} + \sum_{i_{2k+4}=1}^{N} \frac{1 \mid}{\mid 0} + \cdots + \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{1 \mid}{\mid \beta_{2p+1}} = \beta_{2k+1} +$$

$$+ \beta_{2k+3} + \cdots + \beta_{2p+1}.$$

Аналогично получаем оценку сверху для $Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}}$:

$$Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} \leqslant \beta_{2k} + \beta_{2k+2} + \cdots + \beta_{2p}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=2}^{2p+1} \delta_k(p) = \sum_{k=1}^{p} [\max_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+1}} (b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} Q^{(2p+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+1}}) + \max_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} (b_{i_1 i_2 \ldots i_{2k-1}} Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}})] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} [\beta_{2k} (\beta_{2k+1} + \beta_{2k+3} + \cdots + \beta_{2p+1}) + \beta_{2k-1} (\beta_{2k} + \beta_{2k+2} + \cdots \beta_{2p})].$$

Из условия $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty$ следует существование константы K, что

$$\beta_{2k+1} + \beta_{2k+3} + \cdots + \beta_{2p+1} \leqslant K, \ \beta_{2k} + \beta_{2k+2} + \cdots + \beta_{2p} \leqslant K,$$

и поэтому

$$\overline{\lim_{p \to \infty}} \sum_{k=2}^{2p+1} \delta_k(p) \leqslant K \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty.$$

Таким образом, доказана такая теорема.

Теорема. Ветвящаяся цепная дробь (1) с положительными частными знаменателями $b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ ($1 \leqslant i_k \leqslant N$; $k = 1, 2, \ldots$) расходится, если ряд $\Sigma \beta_k$ сходится, где

$$\beta_k = \max_{i_1 i_2 \ldots i_k} b_{i_1 i_2 \ldots i_k}$$

обозначает максимальный член дроби (1) на k-м этаже.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боднар Д. И., Олексив И. Я.* О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами.— Укр. мат. журн., 1976, 28, № 3, с. 373—377.
2. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування.— К. : Наук. думка, 1974.— 272 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
10.02.78

УДК 539.3 : 518.0

О. Г. Сторож

ПРИВЕДЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИИ УПРУГИХ ПЛАСТИН В ЖИДКОСТИ К КЛАССИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Изучению взаимодействия жидкостей с тонкими пластинками и оболочками посвящен ряд работ, например [1, 4—6]. В настоящей работе рассматривается расположенная в плоскости $z = 0$ балочная плита конечной длины $l = b - a$, имеющая неограниченные размеры в направлении, перпендикулярном к плоскости xz ($|y| < \infty$), и находящаяся под слоем идеальной несжимаемой жидкости, занимающей объем $0 \leqslant x \leqslant c$, $|y| < \infty$, $0 \leqslant z \leqslant h$ ($0 \leqslant a < b \leqslant c$). Считаем, что внешняя нагрузка отсутствует, движение жидкости является плоским и происходит в плоскости xz. Тогда при определенных предположениях (подробнее см. в работах [1, 6]) задачу о колебании