Учитывая структуру векторов $\tilde{x}_i$ и $\tilde{y}_i$ (см. лемму 2) и переходя к координатной форме, представляем эти соотношения в матричном виде

$$\tilde{Y}^*\tilde{S}\tilde{X} = \tilde{M}, \tag{5}$$

где $mn \times mn$-матрицы $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ определяются равенствами

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X^{[0]} \\ X^{[1]} \\ \vdots \\ X^{[m-1]} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y^{[0]} \\ Y^{[1]} \\ \vdots \\ Y^{[m-1]} \end{bmatrix}.$$

Из соотношений (5), учитывая обратимость матриц $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ и $\tilde{M}$, получаем

$$\tilde{X}\tilde{M}^{-1}\tilde{Y}^* = \tilde{S}^{-1}$$

или, так как

$$\tilde{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & J_0 \\ & \cdot & J_1 \\ \cdot & \cdot & \vdots \\ J_0 & J_1 & \dots\ J_{m-1} \end{bmatrix},$$

то

$$\begin{bmatrix} X^{[0]} \\ X^{[1]} \\ \vdots \\ X^{[m-1]} \end{bmatrix} \tilde{M}^{-1} [(Y^{[0]})^*, (Y^{[1]})^*, \dots, (Y^{[m-1]})^*] = \begin{bmatrix} 0 & \cdot & J_0 \\ & \cdot & J_1 \\ \cdot & \cdot & \vdots \\ J_0 & J_1 & \dots\ J_{m-1} \end{bmatrix},$$

что и доказывает соотношения (4).

Отметим, что из теоремы 2 как частный случай следует полученная в работе [3] другим способом так называемая ортогональность обобщенно нормированных собственных векторов и собственных строк квадратичного матричного пучка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения : Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1972.— 113 с.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.— М. : Наука, 1965.— 448 с.
3. *Fawzy I.* Orthogonality of generally normalized eigenvectors and eigenrows.— AIAA Journal, 1977, 15, N 2, p. 276—278.
4. *Langer H.* Über Lancaster's Zerlegung von Matrizen-Sharen.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1968, 29, N 1, p. 75—80.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
29.11.77

УДК 512.8

А. И. Балинский, Б. И. Копытко

ОБ УСЛОВИЯХ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНА ВНУТРИ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

При рассмотрении разнообразных задач устойчивости возникает, как известно, необходимость установить факт расположения корней определенного многочлена внутри единичного круга. Этот вопрос решают, например, применяя известный критерий Шура — Кона [3]. В данной работе на основании нового представления безутианты [1] указанный критерий представляется в форме, относительно просто записываемой по коэффициентам исходного многочлена.

Пусть даны многочлены

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$
$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$$
$$(a_0 \neq 0, \quad b_0 \gtrless 0).$$

Матрица $B(f, g)$, порожденная многочленом от двух переменных

$$B(x, y) = (f(x)g(y) - f(y)g(x))/(x-y)\left(= \sum_{k,l=0}^{n-1} b_{kl}x^ky^l\right),$$

т. е. $B(f, g) = \|b_{kl}\|_{k,l=0}^{n-1}$, называется безутиантой многочленов $f(x)$ и $g(x)$ [3, 4].

В работе [1] установлено, что матрица $B(f, g)$ представима в виде

$$B(f, g) = S_f g(A_f), \tag{1}$$

где A_f и S_f — соответственно сопровождающая и ее симметризующая матрицы для многочлена $f(x)$, т. е.

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \cdots & -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix},$$

$$S_f = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для доказательства соотношения (1) приведем следующие вспомогательные утверждения [5].

Лемма 1. Матрица S_f симметризует слева каждую из матриц A_f^k $(k = 1, 2, \ldots)$, т. е. $(S_fA_f^k)^t = S_fA_f^k$ (t — обозначение операции транспонирования).

Непосредственно проверяется, что в блочно-диагональной записи матрицы $S_fA_f^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ имеют вид

$$S_fA_f^k = \operatorname{diag}(A_k, A_{n-k}), \tag{2}$$

где

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 0 & 0 & \cdots & -a_n & -a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a_n & \cdots & -a_{n-k+3} & -a_{n-k+2} \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_{n-k+2} & -a_{n-k+1} \end{bmatrix},$$

$$A_{n-k} = \begin{bmatrix} a_{n-k-1} & a_{n-k-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_{n-k-2} & a_{n-k-3} & \cdots & a_0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Лемма 2. Если корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ многочлена $f(x)$ просты, то матрица S_f конгруэнтна матрице $f'(D)$, точнее,

$$W^t S_f W = f'(D), \tag{3}$$

где

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix};$$

$D = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — диагональная матрица с элементами $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$.

Доказательство. Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $\bar{f}(x) = \bar{a}_0 x^n + \bar{a}_1 x^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n$ и сопровождающую его матрицу $\bar{A}_f$. Пусть x^i (z^i) — линейно независимые собственные векторы, соответствующие собственным значениям x_i $(\bar{x}_i)$ матрицы A_f (A_f^*). Системы векторов $\{x^i\}$ и $\{z^i\}$ связаны условием биортогональности [2]

$$(x^i, \ z^j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ c_i & \text{при } i = j. \end{cases} \tag{4}$$

Используя вид собственных векторов матрицы A_f $(\bar{A}_f)$ и соотношение $z^i = S_f^* y^i$ между собственными векторами матриц A_f^* и $\bar{A}_f$ соответственно, из условия (4) получаем

$$(S_f x^i, \ y^j) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ f'(x_i) & \text{при } i = j. \end{cases}$$

что и доказывает соотношение (3).

Установим представление (1). Для случая простых корней многочлена $f(x)$ в работе [4] показано, что

$$W^t B(f, \ g) W = D_{f,g}, \tag{5}$$

где

$$D_{f,g} = \begin{pmatrix} f'(x_1) g(x_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f'(x_2) g(x_2) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & f'(x_n) g(x_n) \end{pmatrix}.$$

Используя непосредственно проверяемое соотношение $A_f W = WD$ и соотношение (3), получаем $W^t S_f g(A_f) W = D_{f,g}$, что и требовалось доказать.

Обозначим через $f^*(z)$ многочлен $z^n \bar{f}\left(\frac{1}{z}\right)$. Пусть $q(z)$ и $p(z)$ — многочлены, определяемые равенствами $f = q + ip, f^* = q - ip$, и $R(q, p)$ — матрица, порожденная многочленом от двух переменных

$$R(u, \ v) = i \frac{q(u) \bar{p}(v) - \bar{q}(v) p(u)}{1 - uv} \left(= \sum_{k,l=0}^{n-1} r_{kl} u^k v^l \right),$$

т. е. $R(q, \ p) = \| r_{kl} \|_{k,l=0}^{n-1}$. Справедлива следующая теорема [3].

Теорема. Для того чтобы все корни многочлена $f(z)$ находились внутри единичного круга, необходимо и достаточно, чтобы матрица $R(q, p)$ была положительно определенной.

Покажем, что матрица $R(q, \ p)$ представима в виде

$$R(q, \ p) = -S_q p(Q) I, \tag{6}$$

где Q и S_q — соответственно сопровождающая и симметризующая ее матрицы многочлена $q(z)$;

$$I = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & i \\ 0 & \ldots & i & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ i & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим дробно-линейное преобразование $z = \frac{x-i}{x+i}$, переводящее единичный круг $|z| < 1$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}(x) > 0$. Выполняя эту замену переменных в многочлене $f(z)$, получаем $f(z) = \frac{F(x)}{(x+i)^n}$. Представим многочлен $F(x) \left(= (x+i)^n f\left(\frac{x-i}{x+i}\right)\right)$ в виде $F(x) = G(x) + iH(x)$ с вещественными многочленами $G(x)$ и $H(x)$ и образуем безутианту $B(G, H)$. Для эрмитовых форм $R(q, p; u_0, \ldots, u_{n-1})$ и $B(G; H; x_0, \ldots, x_{n-1})$ с матрицами $R(q, p)$ и $B(G, H)$ соответственно при $u = Tx : u_k = [(x+i)^{n-1-k}(x-i)^k]$ * $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ справедливо соотношение (3)

$$2R(q, p; u_0, \ldots, u_{n-1}) = -B(G, H; x_0, \ldots, x_{n-1}), \tag{7}$$

из которого получаем

$$2T^t R(q, p)\overline{T} = -B(G, H). \tag{8}$$

Ограничиваясь случаем вещественности и простоты корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ многочлена $G(x)$, из соотношения (8) получаем

$$W_\alpha^t 2T^t R(q, p)\overline{T}W_\alpha = -\begin{pmatrix} G'(\alpha_1)H(\alpha_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & G'(\alpha_2)H(\alpha_2) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & G'(\alpha_n)H(\alpha_n) \end{pmatrix} = -D_{G,H},$$

где W_α — матрица Вандермонда, составленная из корней многочлена $G(x)$.

Представление (6) будет установлено, если показать, что

$$W_\alpha^t T^t 2S_q p(Q) I\overline{T}W_\alpha = D_{G,H}. \tag{9}$$

Используя непосредственно проверяемые соотношения

$$I\overline{T} = iT \quad \text{и} \quad TW_\alpha = W_z D_1,$$

где W_z — матрица Вандермонда, составленная из корней $z_1, z_2, \ldots, z_n$ многочлена $q(z)$; D_1 — диагональная матрица с элементами $(\alpha_1 + i)^{n-1}, (\alpha_2 + i)^{n-1}, \ldots, (\alpha_n + i)^{n-1}$, а также леммы 1, 2, получаем

$$2iD_1 W_z^t S_q p(Q) W_z D_1 = 2i \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (\alpha_1 + i)^{2(n-1)} p(z_1) q'(z_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (\alpha_2 + i)^{2(n-1)} p(z_2) q'(z_2) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & (\alpha_n + i)^{2(n-1)} p(z_n) q'(z_n) \end{pmatrix}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$H(x) = (x+i)^n p(z); \quad G(x) = (x+i)^n q(z),$$

---

* Скобки обозначают, что индекс опущен.

получаем соотношение (9) и, следовательно, $H(\alpha_k) G'(\alpha_k) = 2i(\alpha_k + i)^{2(n-1)} \times$ $\times\, p(z_k)\, q'(z_k)$. Представление (6) установлено. Отметим, что матрицы, фигурирующие в представлении (6), просто записываются через коэффициенты исходного многочлена, если воспользоваться соотношениями (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задачна собственные значения : Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1972.— 113 с.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц.— М. : Наука, 1976.— 368 с.
3. *Крейн М. Г., Неймарк М. Ю.* Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений.— Харьков : Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1936.— 43 с.
4. *Ландер Ф. И.* Безутианта и обращение ганкелевых и теплицевых матриц.— Мат. исслед., 1974, 9, № 2, с. 173—179.
5. *Подстригач Я. С., Балинский А. И., Зорий Л. М.* Один критерий устойчивости полиномов.— Докл. АН СССР, 1974, **219**, № 3, с. 553—554.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.02.78

УДК 517.52

Д. И. Боднар

НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ ВЕТВЯЩИХСЯ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

Рассмотрим числовые ветвящиеся цепные дроби с положительными частными знаменателями вида

$$\alpha = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \cfrac{1}{b_{i_1} + \sum\limits_{i_2=1}^{N} \cfrac{1}{b_{i_1 i_2} + \cdots}}$$

или с использованием других более компактных обозначений

$$\alpha = b_0 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{1\,|}{|\, b_{i_1}} + \sum_{i_2=1}^{N} \frac{1\,|}{|\, b_{i_1 i_2}} + \cdots + \sum_{i_k=1}^{N} \frac{1\,|}{|\, b_{i_1 i_2 \ldots i_k}} + \cdots \tag{1}$$

Пусть

$$Q^{(p)}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \stackrel{\text{df}}{=} b_{i_1 i_2 \ldots i_k} + \sum_{i_{k+1}=1}^{N} \frac{1\,|}{|\, b_{i_1 i_2 \ldots i_{k+1}}} + \cdots + \sum_{i_p=1}^{N} \frac{1\,|}{|\, b_{i_1 i_2 \ldots i_p}} \tag{2}$$

$$|\, k = \overline{1, p};\quad p = 1, 2, \ldots |.$$

Тогда для разности двух соседних подходящих дробей ветвящейся цепной дроби (1) легко установить формулу [1]

$$\frac{P_{2p+1}}{Q_{2p+1}} - \frac{P_{2p}}{Q_{2p}} = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \cdots \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{2p+1} Q^{(2p+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \prod\limits_{k=1}^{2p} Q^{(2p)}_{i_1 i_2 \ldots i_k}}. \tag{3}$$

Перегруппировывая множители в знаменателях правой части равенства (3), получаем

$$\frac{P_{2p+1}}{Q_{2p+1}} - \frac{P_{2p}}{Q_{2p}} = \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{N} \cdots \sum_{i_{2p+1}=1}^{N} \frac{1}{Q^{(2p+1)}_{i_1} \prod\limits_{k=1}^{p} \left(Q^{(2p+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k}} Q^{(2p+1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{2k+1}}\right)} \times$$