УДК 517.983

Ю. И. Черский

ОБ ОПЕРАТОРАХ СДВИГА В ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В приложениях нередко встречаются импульсные функции от сложного аргумента: $\delta^{(k)}[\alpha(t, s)]$. В случае бесконечно дифференцируемой функции сдвига $\alpha(t, s)$ определение и свойства таких функций даны в работе [2, гл. III]. Для гладких функций сдвига, удовлетворяющих условию $\alpha_t^2 + \alpha_s^2 \neq 0$, этот вопрос изучен с «секвенциальной» точки зрения в работе [1]. В настоящей работе рассматриваются случаи кусочно-непрерывных функций сдвигов, причем обобщенные функции понимаются в следующем упрощенном виде.

Пусть E — линейное множество и требуется построить пространство обобщенных элементов $K' \supset E$.

Определение. Линейное нормированное пространство K назовем основным пространством относительно E, если, во-первых, для любого элемента ψ из E и любого элемента φ из K существует комплексное число $\langle\psi, \varphi\rangle$, причем выполняются свойства линейности по обоим множителям, во-вторых, для любого элемента ψ из E существует положительная постоянная C такая, что для любого элемента φ из K

$$|\langle\psi, \varphi\rangle| \leqslant C\|\varphi\|_K,$$

в-третьих, для любого ненулевого элемента ψ из E найдется элемент $\varphi \in K$ такой, что $\langle\psi, \varphi\rangle \neq 0$.

Определение. Обобщенным элементом f назовем всякий линейный ограниченный функционал на K.

Значения функционала f при действии на элемент $\varphi \in K$ обозначим через (f, φ). Элементы пространства K называются основными.

Линейное нормированное пространство K' обобщенных элементов обладает требуемым свойством $K' \supset E$. Элементы $f \in K'$, определенные при любом $\varphi \in K$ условием

$$(f, \varphi) = \langle\psi, \varphi\rangle, \quad \psi \in E, \tag{1}$$

называются регулярными (f отождествляется с ψ), а остальные, для которых представление (1) невозможно, сингулярными.

1. Линейные операторы в пространствах обобщенных элементов. Пусть E_1, E_2 — линейные множества и A — линейный оператор, действующий из E_1 в E_2, т. е. $A: E_1 \to E_2$. Предположим, что существуют пространства K_1 и K_2 основные относительно E_1 и E_2 соответственно и такие, что

$$(\forall\omega \in K_2)\,(\exists\,\xi \in K_1)\,(\forall\psi \in E_1): \langle A\psi, \omega\rangle_2 = \langle\psi, \xi\rangle_1.$$

Это условие позволяет определить линейный оператор $A^*: K_2 \to K_1$:

$$\langle\psi, A^*\omega\rangle_1 = \langle A\psi, \omega\rangle_2. \tag{2}$$

Предполагая оператор A^* ограниченным, получаем искомое определение оператора $A: K_1' \to K_2'$ в форме равенства

$$(\forall f \in K_1')\,(\forall\omega \in K_2): (Af, \omega)_2 = (f, A^*\omega)_1. \tag{3}$$

Оператор A линейный и ограниченный, $\|A\| = \|A^*\|$.

2. Оператор сдвига по одному аргументу. Обозначим через ν множество вещественных чисел, представляющее собой прямую, луч или конечное число промежутков (отрезков, полуинтервалов, интервалов). Зададим на ν кусочно-непрерывно дифференцируемую функцию $\alpha(t)$, принимающую вещественные значения. Предположим, что существует конечное число непересекающихся промежутков $\nu_1, \ldots, \nu_n$, объединение которых совпадает с ν, на каждом из которых функция $\alpha(t)$ непрерывна и имеет отличную от нуля производную. Введем линейный оператор сдвига A равенством

$$(A\psi)(t) = \begin{cases} \psi[\alpha(t)], & t \in \nu, \\ 0, & t \notin \nu. \end{cases}$$

Этот оператор действует из некоторого линейного множества E_1 функций, определенных на всей вещественной оси, в другое такое множество E_2.

Предполагая основные пространства K_1 и K_2 такими, для которых числа $\langle \psi, \varphi \rangle$ реализуются в форме интегралов:

$$\langle \psi, \varphi \rangle_j = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)\varphi(t)\,dt, \qquad j = 1, 2,$$

ставим цель найти оператор A^*. Получаем

$$\langle A\psi, \omega \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (A\psi)(\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^{n} \int_{\nu_k} \psi[\alpha_k(\tau)]\,\omega(\tau)\,d\tau.$$

Здесь $\alpha_k(\tau) = \alpha(\tau)$ при $\tau \in \nu_k$. Множество значений функции $\alpha_k(\tau)$ обозначим через μ_k:

$$\mu_k = \{t \mid t = \alpha_k(\tau), \ \tau \in \nu_k\}.$$

Функция $\alpha_k(\tau)$ имеет обратную $u_k(t)$, определенную на μ_k. Сделав замену $\alpha_k(\tau) = t$, $\tau = u_k(t)$, продолжим равенство

$$\langle A\psi, \omega \rangle_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\mu_k} \psi(t)\,|u_k'(t)|\,\omega[u_k(t)]\,dt = \langle \psi, A^*\omega \rangle_1.$$

Здесь

$$(A^*\omega)(t) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k(t)\,|u_k'(t)|\,\omega[u_k(t)], \quad \zeta_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mu_k, \\ 0, & t \notin \mu_k. \end{cases}$$

Разумеется, пространства K_1 и K_2 нужно выбрать такими, чтобы оператор A^* действовал из K_2 в K_1 и был ограниченным. Если это достигнуто, то по формуле (3) можно определить оператор сдвига A на пространстве K_1' обобщенных функций f:

$$(Af, \omega(t))_2 = \left(f, \sum_{k=1}^{n} \zeta_k(t)\,|u_k'(t)|\,\omega[u_k(t)]\right)_1. \tag{4}$$

Значения Af этого оператора лежат в пространстве K_2'.

3. Случай кусочно-постоянной функции сдвига. Рассмотрим оператор B, определенный равенством

$$(B\psi)(t) = \begin{cases} \psi[\beta(t)], & t \in \gamma, \\ 0, & t \notin \gamma. \end{cases}$$

Здесь $\gamma = \bigcup_{k=1}^{m} \gamma_k$, γ_k — взаимно непересекающиеся лучи или промежутки. Функцию сдвига $\beta(t)$ считаем кусочно-постоянной: $(\forall t \in \gamma_k) : \beta(t) = \beta_k = \text{const}$. Предполагаем основное пространство K_2 таким, что $(\forall \tilde{\psi} \in E_2)(\forall \omega \in K_2) : \langle \tilde{\psi}, \omega \rangle_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau.$

Чтобы построить оператор B^*, запишем равенства

$$\langle B\psi,\ \omega\rangle_2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (B\psi)(\tau)\,\omega(\tau)\,d\tau = \sum_{k=1}^{m} \psi(\beta_k) \int\limits_{\gamma_k} \omega(\tau)\,d\tau.$$

Как видно, основное пространство K_1 должно состоять из векторов φ вида $\varphi = (\varphi_0(t);\ \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, где $\varphi_0(t)$ — функция, определенная на оси, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — числа. При этом естественно положить

$$(\forall\,\psi \in E_1)\,(\forall \varphi \in K_1) : \langle \psi,\ \varphi\rangle_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\tau)\,\varphi_0(\tau)\,d\tau + \sum_{k=1}^{m} \psi(\beta_k)\,\varphi_k.$$

Тогда $\langle B\psi,\ \omega\rangle_2 = \langle \psi,\ B^*\omega\rangle_1$, где

$$B^*\omega = (0;\ \int\limits_{\gamma_1} \omega(\tau)\,d\tau,\ \ldots,\ \int\limits_{\gamma_m} \omega(\tau)\,d\tau).$$

Итак, оператор $B : K_1' \to K_2'$ можно определить равенством (3): $(Bf,\ \omega)_2 = (f,\ B^*\omega)_1$.

Пример. Функцию $f = \delta(t-h)$ на пространстве K_1 можно определить, если $h \neq \beta_k$: $(\delta(t-h),\ \varphi)_1 = \varphi_0(h)$. В этом случае $(B\delta(t-h),\ \omega(t))_2 = (\delta(t-h),\ B^*\omega)_1 = 0$, т. е. $B\delta(t-h) = 0$.

Замечание. Предположив, что $\gamma \cap \nu = \varnothing$, рассмотрим оператор сдвига

$$(A+B)\psi = \begin{cases} \psi[\alpha(t)], & t \in \nu, \\ \psi(\beta_k), & t \in \gamma_k, \\ 0, & t \notin \nu \cup \gamma. \end{cases}$$

Используя выражение (4), можно определить оператор $A+B$ на пространстве K_1':

$$([A+B]\,f,\ \omega(t))_2 = (f,\ \varphi)_1.$$

Здесь φ — вектор из основного пространства K_1,

$$\varphi = \left(\sum_{k=1}^{n} \zeta_k(t)\,|u_k'(t)|\,\omega\,[u_k(t)];\ \int\limits_{\gamma_1} \omega(\tau)\,d\tau,\ \ldots,\ \int\limits_{\gamma_m} \omega(\tau)\,d\tau\right).$$

4. Оператор сдвига по двум аргументам. Пусть E_1 — некоторое линейное множество функций $\psi(t,\ s)$, определенных на декартовой плоскости. Рассмотрим на E_1 оператор сдвига A:

$$(A\psi)(\tau,\ \sigma) = \begin{cases} \psi[\alpha(\tau,\ \sigma),\ \beta(\tau,\ \sigma)], & (\tau,\ \sigma) \in \nu, \\ 0, & (\tau,\ \sigma) \notin \nu, \end{cases} \tag{5}$$

где $\nu = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \nu_k$, а ν_k — области или множества в виде областей с присоединенными к ним кусками границы. Предполагаем также, что на ν_k функции сдвига α и β имеют непрерывные частные производные и якобиан отличен от нуля.

Вводим, как в п. 2, множества

$$\mu_k = \{(t,\ s)\,|\,t = \alpha(\tau,\ \sigma),\ s = \beta(\tau,\ \sigma),\ (\tau,\ \sigma) \in \nu_k\}$$

и строим на μ_k функции $u_k(t, s)$ и $v_k(t, s)$ как решения τ и σ системы уравнений

$$\begin{aligned} \alpha(\tau,\ \sigma) &= t, \\ \beta(\tau,\ \sigma) &= s, \end{aligned} \qquad (\tau,\ \sigma) \in \nu_k.$$

Предполагая основные пространства K_1 и K_2 такими, что

$$\langle \psi,\ \varphi\rangle_j = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(t,\ s)\,\varphi(t,\ s)\,dt\,ds,\quad j = 1,\ 2,$$

строим, как в п. 2, оператор A^* и получаем определение оператора сдвига $A : K_1' \to K_2'$ в форме, аналогичной (4):

$$(Af, \omega(t, s))_2 = \left(f, \sum_{k=1}^{n} \zeta_k(t, s) \,|\, I_k(t, s) \,|\, \omega[u_k(t, s), v_k(t, s)]\right)_1 . \qquad (6)$$

Здесь

$$I_k(t, s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_k}{\partial t} & \frac{\partial u_k}{\partial s} \\ \frac{\partial v_k}{\partial t} & \frac{\partial v_k}{\partial s} \end{vmatrix}, \quad \zeta_k(t, s) = \begin{cases} 1, & (t, s) \in \mu_k, \\ 0, & (t, s) \notin \mu_k. \end{cases}$$

5. Приложение к обобщенной функции одного аргумента. Пусть наряду с пространствами K_1 и K_2 существует основное пространство K_0 функций $\varphi_0(t)$ такое, что

$$(\forall \varphi(t, s) \in K_1)(\forall s_0) : \varphi(t, s_0) \in K_0,$$

и пусть $\varkappa$ — принадлежащая K_0' обобщенная функция, значения которой будем обозначать как $(\varkappa, \varphi_0(t))_0$. Предположим существование интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\varkappa, \varphi(t, s))_0 \, ds$$

при любой основной функции $\varphi(t, s)$ из K_1. Тогда, полагая по определению этот интеграл равным величине $(\varkappa, \varphi(t, s))_1$, добиваемся (при выполнении определенных условий ограниченности) включения $\varkappa \in K_1'$. Используя формулу (6), можно определить функцию $\varkappa[\alpha(t, s)]$ или, точнее, $A\varkappa$:

$$(A\varkappa, \omega(t, s))_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\varkappa, \sum_{k=1}^{n} \zeta_k(t, s) \,|\, I_k(t, s) \,|\, \omega[u_k, (t, s), v_k(t, s)]\right)_0 ds. \qquad (7)$$

При конкретном выборе линейных нормированных пространств K_0, K_1 и K_2 можно убедиться в независимости правой части последнего равенства от $\beta(t, s)$.

Пример. Пусть $\varkappa = \delta(t)$, т. е. $(\varkappa, \varphi_0(t))_0 = \varphi_0(0)$. Тогда функция $\delta[\alpha(t, s)]$, а точнее, $A\delta$, определяется равенством

$$(A\delta, \omega(t, s))_2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_k(0, s) \,|\, I_k(0, s) \,|\, \omega[u_k(0, s), v_k(0, s)] \, ds. \qquad (8)$$

Из этой формулы видно, что случай, когда границы областей μ_k имеют на прямой $t = 0$ целые отрезки, требует для функции $\delta[\alpha(t, s)]$ специального рассмотрения.

6. Некоторые формулы, связанные с функцией $\delta(t - g(s))$. Пусть λ — область определения кусочно-непрерывно дифференцируемой функции $g(s)$, принимающей вещественные значения. Рассмотрим частный случай оператора (5):

$$(A\psi)(\tau, \sigma) = \begin{cases} \psi(\tau - g(\sigma), \sigma), & (\tau, \sigma) \in \nu, \\ 0, & (\tau, \sigma) \notin \nu. \end{cases}$$

Здесь ν — произведение множества $\mathbb{R}$ вещественных чисел и множества λ, $\nu = \mathbb{R} \times \lambda$.

В данном случае формула (8) значительно упростится:

$$(A\delta, \omega(t, s))_2 = \int_{\lambda} \omega[g(s), s] \, ds. \qquad (9)$$

Найдем интеграл Фурье построенной функции $\delta(t - g(s))$ по аргументу s. Оператор (преобразование Фурье) обозначим буквой V и определим равенством

$$(V\psi)(t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t, \xi) e^{is\xi} d\xi.$$

Пользуясь формулой (2), нетрудно установить, что $V^* = V$. Таким образом,

$$(VA\delta, \varphi(t, s)) = (A\delta, (V\varphi)(t, s))_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda} ds \int_{-\infty}^{\infty} \varphi[g(s), \xi] e^{is\xi} d\xi.$$

Для дальнейших выкладок положим $\lambda = \bigcup_{k=1}^{m} \lambda_k$, где при $k = 1, \ldots, n$ λ_k есть лучи или промежутки, на которых функция $g(s)$ непрерывна и имеет производную $g'(s) \neq 0$, а при $k = n + 1, \ldots, m$ множества λ_k обозначают промежутки конечной длины, на которых функция $g(s)$ постоянна, $g(s) = h_k = \mathrm{const}$, $\lambda_k \cap \lambda_j = \varnothing$, $k \neq j$. Теперь интегралу последнего равенства можно придать форму

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{n} \int_{l_k} |\rho_k'(t)|\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t, \xi) e^{i\rho_k(t)\xi} d\xi + \sum_{k=n+1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(h_k, \xi) r_k(\xi)\, d\xi. \quad (10)$$

Здесь l_k — множество значений функции $g(s)$ на λ_k; $\rho_k(t)$ — определенные на l_k функции, обратные к функции $g(s)$, $s \in \lambda_k$;

$$r_k(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\lambda_k} e^{is\xi} ds.$$

Выражение (10) можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, s) \varphi(t, s)\, dt\, ds + \sum_{k=n+1}^{m} (\delta(t - h_k), \varphi(t, s) r_k(s)),$$

где

$$f(t, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{n} |\rho_k'(t)| e^{i\rho_k(t)s}.$$

Таким образом,

$$V\delta(t - g(s)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{n} |\rho_k'(t)| e^{i\rho_k(t)s} + \sum_{k=n+1}^{m} r_k(s)\, \delta(t - h_k).$$

В заключение отметим, что если в операторе (5) функции сдвига α и β образуют якобиан, равный нулю в некоторых областях или на линиях, то можно сделать построения в смысле п. 3. Не представляет также труда получить формулы в случае сдвига по трем и большему числу аргументов. Однако детальное рассмотрение вопроса в конкретных функциональных пространствах и строгие доказательства составили бы новую главу в теории обобщенных функций и выходят за рамки данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций: Секвенциальный подход.— М. : Мир, 1976.— 311 с.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними.— М. : Физматгиз, 1959.— 470 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 24.01.78