1. *Бурмистров Е. Ф.* Изгиб тонкой изотропной плиты с отверстием общего вида с учетом температурных напряжений.— В кн.: Концентрация напряжений.— Киев: Наук. думка, 1965, вып. 1, с. 53—58.
2. *Гузь О. М.* Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках.— Прикл. механіка, 1962, 8, № 6, с. 605—612.
3. *Пелех Б. Л., Полевой Б. Н.* Концентрация температурных напряжений возле криволинейных отверстий в трансверсально-изотропных пластинках, слабо сопротивляющихся сдвигу.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1975, вып. 15, с. 129—135.
4. *Пелех Б. Л., Польовий Б. М.* Узагальнені рівняння температурного згину пластин з урахуванням трансверсальних механічних характеристик та їх застосування в задачах концентрації напружень.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 1, с. 36—40.
5. *Полевой Б. Н.* Влияние межслоевой податливости на концентрацию температурных напряжений в трансверсально-изотропной пластинке, ослабленной квадратным отверстием.— В кн.: Композиционные материалы и новые конструкции. Киев: Наук. думка, 1977, с. 39—46.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
18.03.78

УДК 534.1 : 531.221.3

Л. М. Зорий, И. И. Теребушко

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ К КАЧЕСТВЕННОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ УПРУГИХ ТРУБОПРОВОДОВ

Изучение малых колебаний и устойчивости равновесия упругого прямолинейного трубопровода с упруго закрепленными концами сводится, как известно [4], к следующей обобщенной задаче на собственные значения:

$$\begin{gathered} f^{\mathrm{IV}}(x) + v^2 f''(x) + 2v\lambda f'(x) + (1+\varkappa)\lambda^2 f(x) = 0; \\ f''(0) - \psi_0 f'(0) = 0; \quad f''(1) + \psi_1 f'(1) = 0; \\ f'''(0) + \varkappa_0 f(0) = 0; \quad f'''(1) - \varkappa_1 f(1) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $v = ul\sqrt{\frac{\rho}{EI}}$; u — скорость потока жидкости ($v > 0$ при направлении протекания от левого конца трубопровода к правому); l, EI — соответственно длина и изгибная жесткость трубопровода; $\varkappa = \frac{m}{\rho}$ — отношение линейных плотностей трубопровода и потока; $0 \leqslant \psi_i \leqslant \infty$, $0 \leqslant \varkappa_i \leqslant \infty$ ($i = 0, 1$) — параметры упругости закрепления, причем индекс «0» отвечает левому, а «1» — правому концам; λ — характеристический показатель.

Построим согласно работам [2, 3] характеристический ряд задачи (1):

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(v, \varkappa, \varkappa_0, \varkappa_1 \psi_0, \psi_1)\lambda^n. \tag{2}$$

Для этого оказывается удобным преобразовать формулы (15), (16) работы [3] к следующему виду:

$$\begin{gathered} F_0 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n}\lambda^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1}\lambda^{2n+1}; \\ F_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_{2n}\lambda^{2n} + \beta_{2n+1}\lambda^{2n+1}); \\ F_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{2n}\lambda^{2n}, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\alpha_{2n} = 2^{2n-1}\sum_{i=0}^{n} (C_{n-1}^{n-1-i} + C_n^{n-i})\, v^{2(n-i)}(1+\varkappa)^i \varphi_{2n-i,6n-2i};$$

$$\alpha_{2n+1} = 2^{2n+1} \sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i} v^{2(n-i)+1} (1+\varkappa)^i \varphi_{2n,6n+3-2i};$$

$$\beta_{2n} = 2^{2n} \sum_{i=0}^{n} C_n^i v^{2(n-i)} (1+\varkappa)^i \varphi_{2n,6n+2-2i}; \tag{4}$$

$$\beta_{2n+1} = 2^{2n+1} \sum_{i=0}^{n} C_n^i v^{2(n-i)+1} (1+\varkappa)^i \varphi_{2n+1,6n+5-2i};$$

$$\gamma_{2n} = 2^{2n+1} \sum_{i=0}^{n} C_n^i v^{2(n-i)} (1+\varkappa)^i \varphi_{2n+1,6n+4-2i};$$

$$\varphi_{i,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k C_{k+m}^k v^{2k} x^{2k+j}}{(2k+j)!}. \tag{5}$$

Учитывая равенства (2)—(4), определяем последовательно коэффициенты характеристического ряда (2):

$$A_0 = (\varkappa_0\psi_0 + \varkappa_1\psi_1) + (\varkappa_0\psi_1 + \varkappa_1\psi_0)\beta_0'' + \psi_0\psi_1(\varkappa_0 + \varkappa_1)\beta_0' +$$
$$+ \varkappa_0\varkappa_1\gamma_0'' + \varkappa_0\varkappa_1(\psi_0 + \psi_1)\gamma_0' + \varkappa_0\varkappa_1\psi_0\psi_1\gamma_0;$$
$$A_1 = (\varkappa_0 - \varkappa_1)\alpha_1' + (\varkappa_0\psi_0 - \varkappa_1\psi_1)\alpha_1 + (\varkappa_0\psi_1 - \varkappa_1\psi_0)\beta_1'' +$$
$$+ \psi_0\psi_1(\varkappa_0 - \varkappa_1)\beta_1', \tag{6}$$

. . . .

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

1. При упругом защемлении концов трубопровода ($\varkappa_0 = \varkappa_1 = \infty$) характеристическое уравнение рассматриваемой задачи имеет вид

$$[F_4'' + (\psi_0 + \psi_1) F_4' + \psi_0\psi_1 F_4]_{x=1} = 0. \tag{7}$$

Отсюда при $\psi_0 = \infty$ и $\psi_1 = 0$ приходим к уравнению

$$[F_4']_{x=1} = 0,$$

отвечающему случаю, когда один конец трубопровода жестко защемлен, а другой — шарнирно оперт.

Как видно из формул (3)—(5), функция F_4 и, следовательно, ее производные по переменной x зависят четным образом от параметра скорости потока v. Таким образом, изменение направления протекания жидкости на противоположное ($v < 0$) при рассматриваемой постановке задачи не влияет на динамические характеристики, определяемые уравнением (7) (частоты колебаний, критические скорости, формы колебаний и др.) при любых значениях параметров $\varkappa$, ψ_0 и ψ_1. Этот вывод (очевидный при симметрическом защемлении) имеет место и при $\psi_0 \neq \psi_1$ (несимметрическое защемление концов), в том числе для отмеченного выше случая *.

Данный вывод не имеет места, если допустить поперечные перемещения одного или обоих концов. Однако по мере увеличения жесткости опор на указанных перемещениях ($\varkappa_0 \to \infty$, $\varkappa_1 \to \infty$) изменение направления потока на противоположное будет все меньше влиять на динамические характеристики трубопровода.

2. При малых значениях параметра v из формулы (4)—(6), сохраняя в рядах (5) только первые члены, получаем

$$A_1 \approx 2v(\varkappa_0 - \varkappa_1)\left[\frac{1}{2!} + \frac{\psi_0\psi_1}{4!} + \frac{1}{3!}(\psi_0 + \psi_1)\right]. \tag{8}$$

Согласно обобщенному критерию Гурвица [5], при $A_1 < 0$ прямолинейная форма равновесия трубопровода является неустойчивой. Следователь-

---

* Для задач обтекания прямоугольных пластинок и цилиндрических оболочек сверхзвуковым потоком аналогичный вывод был получен ранее [1].

но, при $\varkappa_0 > \varkappa_1$, как видно из формулы (8), трубопровод неустойчив при протекании потока от правого конца к левому ($v < 0$), а при $\varkappa_0 < \varkappa_1$ — при протекании потока от левого конца к правому ($v > 0$).

Случай $\varkappa_0 = \varkappa_1 = \tilde{\varkappa}$, когда приближенное значение (8) дает $A_1 \approx 0$, рассмотрим более подробно. Представив коэффициент A_1 в замкнутой форме, получим

$$A_1 = \frac{2\tilde{\varkappa}}{v}\left\{(\psi_0 - \psi_1)\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\sin v}{v} + \frac{\cos v}{2}\right]\right\}.$$

Так как выражение в квадратных скобках при $v \neq 0$ положительно, то можно сделать вывод, что при $\psi_0 > \psi_1$ трубопровод неустойчив, если $v < 0$; при $\psi_0 < \psi_1$ — если $v > 0$.

Объединяя все рассмотренные в п. 2 случаи, приходим к следующему выводу: при сколь угодно малой скорости потока прямолинейная форма трубопровода оказывается неустойчивой, если поток направлен от конца, в определенном смысле закрепленного менее жестко, чем другой конец (закрепленный более жестко).

В заключение отметим, что при учете внешнего трения последний вывод не имеет места, поскольку коэффициент $\tilde{A}_1$ характеристического ряда имеет вид

$$\tilde{A}_1 = A_1 + b(1+\varkappa)\left[(\psi_0 + \psi_1) + \frac{2}{3!}(\varkappa_0 + \varkappa_1) + \frac{2}{4!}(\varkappa_0\psi_0 + \varkappa_1\psi_1) + \right.$$
$$+ \frac{1}{3!}(\varkappa_0\psi_1 + \varkappa_1\psi_0) + \frac{8}{6!}\varkappa_0\varkappa_1 + \frac{2}{4!}\psi_0\psi_1 + \frac{8}{7!}\varkappa_0\varkappa_1(\psi_0 + \psi_1) +$$
$$\left. + \frac{4}{5!}\psi_0\psi_1(\varkappa_0 + \varkappa_1) + \frac{1}{7!}\varkappa_0\varkappa_1\psi_0\psi_1\right]$$

и, следовательно, является положительным при достаточно малых значениях параметра v. Тем не менее при достаточно малом трении критическое значение скорости потока в случаях, отмеченных в данном выводе, будет небольшим. Действительно, если $\tilde{v}$ — наименьшее значение, при котором $\tilde{A}_1$ меняет знак, то, очевидно, $v_{кр} < \tilde{v}$.

1. *Бердник Я. С., Зорій Л. М.* Один спосіб якісного дослідження коливань і стійкості систем з розподіленими параметрами. — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1973, № 7, с. 621—623.
2. *Зорій Л. М.* До теорії стійкості систем з розподіленими параметрами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 11, с. 992—995.
3. *Зорій Л. М.* Про одне зображення характеристичних рівнянь деяких крайових задач з розподіленими параметрами.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1968, № 12, с. 1072—1075.
4. *Немат-Нассер, Прасад, Герман.* Дестабилизирующее влияние сил, зависящих от скорости, в неконсервативных непрерывных системах.— Ракет. техника и космонавтика, 1966, № 7, с. 160—165.
5. *Чеботарев Н. Г., Мейман Н. С.* Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949.— 328 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
19.07.78