

$$\psi = \frac{M_0 D_1 a^2 S_2 \sin ax}{\lambda \sqrt{a^2 + \frac{k_2}{D_3} S_1}} e^{-y\lambda \sqrt{a^2 + \frac{k_2}{D_3} S_1}} + \frac{M_0 g_3 a^3 \alpha S_2}{S_1} e^{-a\lambda y} \sin ax; \quad (32)$$

$$\varphi = -\frac{M_0 D_1 a^3 S_2}{S_1} e^{-y\lambda \sqrt{a^2 + \frac{k_2}{D_3} S_1}} \cos ax, \quad (33)$$

где

$$S_1 = g_3 a^4 + \frac{2\lambda k_2}{\alpha^2} g_1 a^2 - \frac{k_1 k_2 D_2}{D_3}; \quad (34)$$

$$S_2 = \frac{\lambda a}{\alpha^2} + \frac{k_1}{a\lambda D_3 \alpha^2} - \frac{a}{\lambda}.$$

На основании работы [4] можно легко определить усилия и моменты в пластинке.

В случае трансверсальной изотропии получаем

$$\omega = \frac{M_0}{2aD} y e^{-ay} \cos ax.$$

Если сделать замену $x = -\frac{\pi}{2a} + \tilde{x}$, то получим

$$M_y|_{y=0} = M_0 \sin a\tilde{x}; \quad \omega = \frac{M_0}{2aD} y e^{-ay} \sin a\tilde{x},$$

что совпадает с результатами работы [1], полученными в случае трансверсальной изотропии.

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин.— М.: Наука, 1967.— 266 с.
2. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление.— М.: Наука, 1974.— 542 с.
3. Корн Г., Корн Г. Справочник по математике.— М.: Наука, 1970.— 720 с.
4. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.— Киев: Наук. думка, 1973.— 248 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР
Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию
20.06.78

УДК 539.3

Б. Н. Полевой

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ИЗГИБ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В рамках классической теории Кирхгофа—Лява [1] изучено распределение температурных напряжений в изотропных пластинках, ослабленных криволинейными отверстиями. На базе уравнений теории пластин типа С. П. Тимошенко [3, 5] определена концентрация температурных напряжений возле отверстий в трансверсально-изотропных пластинках. Для пластин, изготовленных из современных композиционных материалов, при исследовании концентрации температурных напряжений около отверстий необходимо учитывать анизотропию механических и температурных свойств. Такому исследованию посвящена настоящая работа, в которой определено влияние трансверсальных механических и температурных характеристик материала на распределение температурных напряжений при изгибе пластинок, ослабленных криволинейными отверстиями. Численные расчеты произведены для нескольких видов отверстий, наиболее чаще встречающихся в инженерной практике.

Исследуем напряженное состояние трансверсально-изотропной пластинки толщиной $2h$, ослабленной криволинейным отверстием, контур которого в параметрической форме записывается уравнениями

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \gamma + \eta \rho^{-N} \cos N\gamma; \\y &= \rho \sin \gamma - \eta \rho^{-N} \sin N\gamma,\end{aligned}\quad (1)$$

где ρ, γ — ортогональная криволинейная система координат; x, y — прямоугольная система координат; η, N — параметры, характеризующие форму отверстия.

Пластинка находится в заданном температурном поле, линейно изменяющемся по толщине

$$T = zt(x, y) \quad (T^- \leq T \leq T^+) \quad \text{при} \quad -h \leq z \leq h, \quad (2)$$

где T^+, T^- — температура внешней и внутренней поверхностей пластинки. В этих условиях пластинка испытывает температурный изгиб и разрешающие уравнения теории трансверсально-изотропных пластин, учитывающие сдвиговые и нормальные деформации и напряжения, имеют вид [4]

$$\begin{aligned}\Delta \Delta F &= -\frac{\kappa}{h} (\alpha_t + \nu' \alpha'_t) \Delta T_1; \\ \Delta \Phi - s_1^2 \Phi &= 0; \\ \Delta \Phi - s_2^2 \Phi &= -\frac{\kappa}{hk} \left[\left(\frac{7}{5} \nu' \lambda - \frac{\Omega' \lambda^2 h^2}{3D} \right) \alpha_t + \left(\frac{7}{10} - \frac{\Omega' \lambda^2 h^2}{3D} \right) \nu' \alpha'_t \right] T_1.\end{aligned}\quad (3)$$

Усилия и моменты выражаются следующим образом [4]:

$$\begin{aligned}M_\rho &= -D \left\{ \frac{\partial^2 (F + \Phi)}{\partial \rho^2} + \nu \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 (F + \Phi)}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (F + \Phi)}{\partial \rho} \right] - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \gamma} \left(\frac{\Phi}{\rho} \right) \right\} + \frac{196 \varepsilon \Omega'}{9 h^2 k} \Phi - \frac{2}{3} \frac{E_0 h^2}{k} \left[\left(1 + \frac{7}{5} \nu' \lambda \right) \alpha_t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{17}{10} \nu' \alpha'_t \right] T_1; \\ M_\gamma &= -D \left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 (F + \Phi)}{\partial \gamma^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (F + \Phi)}{\partial \rho} + \nu \frac{\partial^2 (F + \Phi)}{\partial \rho^2} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \gamma} \left(\frac{\Phi}{\rho} \right) \right] + \frac{196 \varepsilon \Omega'}{9 h^2 k} \Phi - \frac{2}{3} \frac{E_0 h^2}{k} \times \\ &\quad \times \left[\left(1 + \frac{7}{5} \nu' \lambda \right) \alpha_t + \frac{17}{10} \nu' \alpha'_t \right] T_1; \\ H_{\rho\gamma} &= -(1 - \nu) D \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \gamma} \left(\frac{F + \Phi}{\rho} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \frac{s_1^2}{2} \Phi \right]; \\ Q_{(0)\rho} &= -\Lambda' \left\{ \varepsilon \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\Delta F + \frac{\kappa}{h} (\alpha_t + \nu' \alpha'_t) T_1 \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right\}; \\ Q_{(0)\gamma} &= -\Lambda' \left\{ \varepsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\Delta F + \frac{\kappa}{h} (\alpha_t + \nu' \alpha'_t) T_1 \right] + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right\}; \\ Q_{(2)\rho} &= \frac{\Lambda'}{14} \left\{ \left(\varepsilon + \frac{9 \lambda h^2}{14} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\Delta F + \frac{\kappa}{h} (\alpha_t + \nu' \alpha'_t) T_1 \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma} \right\} + \\ &\quad + \frac{3D}{\lambda h^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}; \\ Q_{(2)\gamma} &= \frac{\Lambda'}{14} \left\{ \left(\varepsilon + \frac{9 \lambda h^2}{14} \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[\Delta F + \frac{\kappa}{h} (\alpha_t + \nu' \alpha'_t) T_1 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right\} + \frac{3D}{\lambda h^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma}.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь

$$T_1 = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h Tz dz; \quad s_1^2 = 6k'(1+\nu) \frac{r_0^2}{h^2} \frac{G'}{E} = \frac{2r_0^2}{(1-\nu)\varepsilon}; \quad s_2^2 = \frac{196\Omega'}{9\Lambda'h^2k};$$

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}; \quad \Lambda' = 2k'G'h; \quad \Omega' = \frac{7}{5} E'jh; \quad \lambda = \frac{\nu'}{1-\nu} \frac{E}{E'};$$

$$E_0 = \frac{E}{1-\nu-2(\nu')^2 E/E'}; \quad E'_0 = \frac{(1-\nu)E'}{1-\nu-2(\nu')^2 E/E'};$$

$$\kappa = \frac{1-\nu^2}{1-\nu-2(\nu')^2 E/E'}; \quad k = 1 + \frac{\Omega'\lambda^2 h^2}{3D}; \quad k' = \frac{14}{15},$$

где E , ν , α_i — модуль упругости, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного удлинения в плоскости изотропии; E' , G' , ν' , α'_i — модуль упругости, модуль сдвига, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного удлинения в плоскости, нормальной к плоскости изотропии.

Задача состоит в нахождении решения уравнений (3), удовлетворяющего на контуре отверстия граничным условиям

$$(Q_{(0)\rho} + Q_{(0)\rho}^0)\Gamma = 0; \quad (Q_{(2)\rho} + Q_{(2)\rho}^0)\Gamma = 0;$$

$$(M_\rho + M_\rho^0)\Gamma = 0; \quad (H_{\rho\gamma} + H_{\rho\gamma}^0)\Gamma = 0, \quad (5)$$

где величины $Q_{(0)\rho}^0$, $Q_{(2)\rho}^0$, M_ρ^0 , $H_{\rho\gamma}^0$ соответствуют решению термоупругой задачи пластинки без отверстия; $Q_{(0)\rho}$, $Q_{(2)\rho}$, M_ρ , $H_{\rho\gamma}$ — силовые факторы, вызванные наличием отверстия.

Указанную задачу решаем методом возмущения формы границы в виде, предложенном А. Н. Гузем [2] для решения задач о концентрации напряжений около отверстий в оболочках. Представим функции F , φ , Φ , а также компоненты усилий $Q_{(0)\rho}$, $Q_{(0)\gamma}$, $Q_{(2)\rho}$, $Q_{(2)\gamma}$ и моментов M_ρ , M_γ , $H_{\rho\gamma}$ в виде рядов по степеням малого параметра η ($\eta \ll 1$):

$$\{F, \varphi, \Phi, Q_{(0)\rho}, Q_{(0)\gamma}, Q_{(2)\rho}, Q_{(2)\gamma}, M_\rho, M_\gamma, H_{\rho\gamma}\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \eta^j \{F_j, \varphi_j, \Phi_j, Q_{(0)\rho}^{(j)}, Q_{(0)\gamma}^{(j)}, Q_{(2)\rho}^{(j)}, Q_{(2)\gamma}^{(j)}, M_\rho^{(j)}, M_\gamma^{(j)}, H_{\rho\gamma}^{(j)}\}. \quad (6)$$

После перерасчета физических соотношений, разрешающих уравнений и граничных условий для j -го приближения решение задачи с криволинейными отверстиями сводится к последовательности краевых задач для пластинки с круговыми отверстиями.

Тогда в j -м приближении решение системы (3), удовлетворяющее условиям на бесконечности, можно взять в виде

$$F_j = A_0^{(j)} \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(j)} \rho^{-n} + B_n^{(j)} \rho^{-n+2}] \cos n\gamma;$$

$$\varphi_j = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(j)} K_n(s_1 \rho) \sin n\gamma; \quad (7)$$

$$\Phi_j = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(j)} K_n(s_2 \rho) \cos n\gamma + \frac{9\Lambda'h\kappa}{196\Omega'} \left[\left(\frac{7}{5} \nu'\lambda - \frac{\Omega'\lambda^2 h^2}{3D} \right) \alpha_i + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{7}{10} - \frac{\Omega'\lambda^2 h^2}{3D} \right) \nu' \alpha'_i \right] T_1,$$

где $A_0^{(j)}$, $A_n^{(j)}$, $B_n^{(j)}$, $C_n^{(j)}$, $D_n^{(j)}$ — произвольные постоянные, которые определяем из граничных условий (5); $K_n(s_i \rho)$ — функции Макдональда n -го порядка.

Подставляя выражение (7) в формулы усилий и моментов j -го приближения и в граничные условия (5), получаем системы алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных функций (7). Из этих систем

определяем неизвестные постоянные в нулевом, первом и во втором приближениях.

Дальше определяем значения перерезывающих усилий $Q_{(0)\gamma}$, $Q_{(2)\gamma}$ и изгибающих моментов M_γ на контуре отверстия с учетом трех приближений. Из анализа этих выражений следует, что они существенно зависят от параметров E/G' , E/E' , характеризующих податливость материала пластинки поперечным сдвиговым и нормальным деформациям, от отношений температурных расширений α'_i/α_i и относительных размеров концентратора r_0/h .

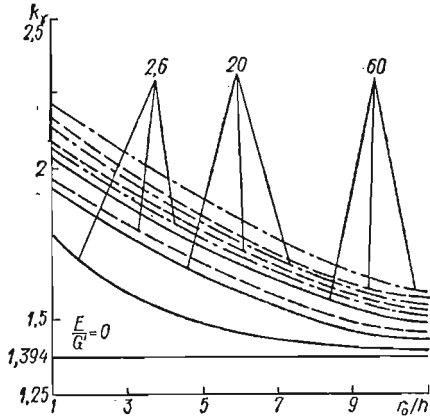


Рис. 1

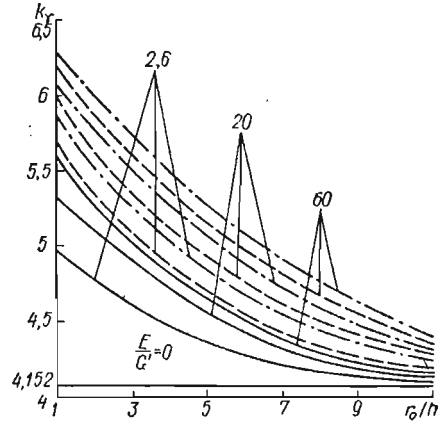


Рис. 2

В предельных случаях при $\alpha'_i = 0$, $E/E' = 0$ ($E' \rightarrow \infty$) следуют результаты, полученные в работах [3, 5] по теории пластин типа С. П. Тимошенко, а при $\alpha'_i = 0$, $E/E' = 0$ ($E' \rightarrow \infty$), $E/G' = 0$ ($G' \rightarrow \infty$) — классический результат [1].

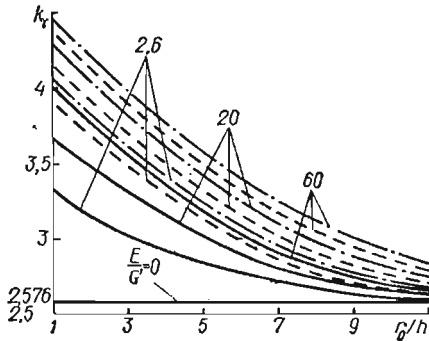


Рис. 3

Результаты численных расчетов представлены на рис. 1—3 для наиболее характерных форм отверстий, чаще всего встречающихся в инженерной практике: эллиптическое — $N = 1$, $\eta = \frac{1}{5}$; равностороннее треугольное с закругленными углами — $N = 2$, $\eta = \frac{1}{3}$; квадратное с закругленными углами — $N = 3$, $\eta = \frac{1}{6}$. Случай кругового отверстия рассмотрен ранее в работе [4].

На рис. 1—3 представлены графики изменения коэффициентов кон-

центрации $k_\gamma = -\frac{M_\gamma^{\max}}{D\alpha_i t_0}$ в зависимости от параметров E/E' , E/G' , r_0/h при $\nu = 0,3$; $\nu' = 0,07$; $\alpha'_i/\alpha_i = 2$. На этих графиках сплошные линии отвечают параметру $E/E' = 0$, штриховые $E/E' = 5$, штрихпунктирные — $E/E' = 7$. Как следует из рис. 1—3, коэффициенты концентрации температурных напряжений k_γ с увеличением параметров E/E' , E/G' и с уменьшением относительных размеров отверстия r_0/h увеличиваются. Прямые $k_\gamma = 1,394$, $k_\gamma = 4,152$, $k_\gamma = 2,576$ соответствуют результатам работы [1] для случая эллиптического, треугольного и квадратного отверстий, где коэффициенты концентрации температурных напряжений определены по классической теории пластин и выглядят, как асимптоты для полученных кривых по мере увеличения относительных размеров отверстий.

1. Бурмистров Е. Ф. Изгиб тонкой изотропной плиты с отверстием общего вида с учетом температурных напряжений.— В кн.: Концентрация напряжений.— Киев: Наук. думка, 1965, вып. 1, с. 53—58.
2. Гузь О. М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках.— Прикл. механіка, 1962, 8, № 6, с. 605—612.
3. Пелех Б. Л., Полевой Б. Н. Концентрация температурных напряжений возле криволинейных отверстий в трансверсально-изотропных пластинках, слабо сопротивляющихся сдвигу.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1975, вып. 15, с. 129—135.
4. Пелех Б. Л., Польовий Б. М. Узагальнені рівняння температурного згину пластин з урахуванням трансверсальних механічних характеристик та їх застосування в задачах концентрації напружень.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 1, с. 36—40.
5. Полевой Б. Н. Влияние межслоевой податливости на концентрацию температурных напряжений в трансверсально-изотропной пластинке, ослабленной квадратным отверстием.— В кн.: Композиционные материалы и новые конструкции. Киев: Наук. думка, 1977, с. 39—46.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
18.03.78

УДК 534.1 : 531.221.3

Л. М. Зорий, И. И. Тербушко

**О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ РЯДОВ
К КАЧЕСТВЕННОМУ ИССЛЕДОВАНИЮ ДИНАМИКИ
УПРУГИХ ТРУБОПРОВОДОВ**

Изучение малых колебаний и устойчивости равновесия упругого прямолинейного трубопровода с упруго закрепленными концами сводится, как известно [4], к следующей обобщенной задаче на собственные значения:

$$\begin{aligned} f^{IV}(x) + v^2 f''(x) + 2v\lambda f'(x) + (1 + \kappa)\lambda^2 f(x) &= 0; \\ f''(0) - \psi_0 f'(0) &= 0; \quad f''(1) + \psi_1 f'(1) = 0; \\ f'''(0) + \kappa_0 f(0) &= 0; \quad f'''(1) - \kappa_1 f(1) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $v = ul \sqrt{\frac{\rho}{EI}}$; u — скорость потока жидкости ($v > 0$ при направлении протекания от левого конца трубопровода к правому); l , EI — соответственно длина и изгибная жесткость трубопровода; $\kappa = \frac{m}{\rho}$ — отношение линейных плотностей трубопровода и потока; $0 \leq \psi_i \leq \infty$, $0 \leq \kappa_i \leq \infty$ ($i = 0, 1$) — параметры упругости закрепления, причем индекс «0» отвечает левому, а «1» — правому концам; λ — характеристический показатель.

Построим согласно работам [2, 3] характеристический ряд задачи (1):

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(v, \kappa, \kappa_0, \kappa_1, \psi_0, \psi_1) \lambda^n. \quad (2)$$

Для этого оказывается удобным преобразовать формулы (15), (16) работы [3] к следующему виду:

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n} \lambda^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} \lambda^{2n+1}; \\ F_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_{2n} \lambda^{2n} + \beta_{2n+1} \lambda^{2n+1}); \\ F_4 &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{2n} \lambda^{2n}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\alpha_{2n} = 2^{2n-1} \sum_{i=0}^n (C_{n-1}^{n-1-i} + C_n^{n-i}) v^{2(n-i)} (1 + \kappa)^i \varphi_{2n-i, 6n-2i};$$