Полученное здесь решение уравнения (1) при $m = 0.1$ полностью совпадает с решением, полученным в работах [2—4,7] путем указанного выше разложения дифференциального оператора на регулярную и сингулярную составляющие.

1. *Гульчевский Л. С., Кулик А. Н.* Двумерная задача теплопроводности для многослойных тел.— ФХОМ, 1976, № 3, с. 33—38.
2. *Колесов В. С., Власов Н. М., Процюк Б. В.* Температурные напряжения в круглой многослойной пластине.— В кн.: Математические методы в термомеханике.— Киев : Наук. думка, 1978, с. 41—51.
3. *Коляно Ю. М.* Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 7—11.
4. *Коляно Ю. М., Иваньк Е. Г.* Периодическое температурное поле в составном цилиндре.— ФХОМ, 1976, № 6, с. 45—49.
5. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Термоупругость многослойных тел.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1112—1117.
6. *Коляно Ю. М., Процюк Б. В.* Термоупругость многослойного цилиндра.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 8, с. 718—721.
7. *Коляно Ю. М., Процюк Б. В.* Термоупругость полого слоистого цилиндра.— ФХОМ, 1977, № 3, с. 12—17.
8. *Лазарян В. А., Конашенко С. И.* Обобщенные функции в задачах механики.— К. : Наук. думка, 1974.— 192 с.
9. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем.— М. : Машиностроение, 1973.— 660 с.
10. *Онанов Г. Г.* Уравнения с сингулярными коэффициентами типа дельта-функции и ее производных.— Докл. АН СССР, 1970, 191, № 5, с. 997—1000.
11. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык В. И., Лозбень В. Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплообмена. — Киев : Наук. думка, 1977.— 160 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
16.11.78

УДК 539.3

Б. Л. Пелех, О. С. Гаврылив

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Рассмотрим пластинку, выполненную из армированного пластика. Считаем ее материал ортотропным. Отнесем срединную поверхность пластинки к ортогональным координатам x, y. Углы поворотов волокон, нормальных к срединной поверхности, в направлениях осей x, y обозначим соответственно γ_1, γ_2, прогиб срединной поверхности — w.

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид

$$k_1\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + k_2\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + q = 0; \tag{1}$$

$$D_1\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x^2} + D_3\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial y^2} + (D_{12} + D_3)\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x\partial y} - k_1\left(\gamma_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0; \tag{2}$$

$$D_3\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x^2} + D_2\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial y^2} + (D_{12} + D_3)\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x\partial y} - k_2\left(\gamma_2 + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0, \tag{3}$$

где D_1, D_2 — жесткости на изгиб в срединной плоскости в направлениях соответственно x, y; k_1, k_2 — жесткости на сдвиг; D_3 — жесткость на кручение; $D_{12} = D_1\nu_2 = D_2\nu_1$; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона. Принимаем, что

$$\gamma_1 = -\frac{\partial w}{\partial x} - \varepsilon_1\frac{\partial}{\partial x}\Delta_1 w + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{g_1}{k_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\varepsilon_1^2}{D_1}\frac{\partial q}{\partial x}; \tag{4}$$

$$\gamma_2 = -\frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_2\frac{\partial}{\partial y}\Delta_2 w - \lambda\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{g_1}{k_2\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\varepsilon_2^2}{D_2}\frac{\partial q}{\partial y} \tag{5}$$

при условии

$$D_1 = D_2\alpha^4; \quad D_2\alpha^2 = D_{12} + 2D_3. \tag{6}$$

Здесь

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \Delta_2 = \alpha^2\Delta_1;$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}; \quad \varepsilon_j = \frac{D_j}{k_j} \qquad (j = 1,\ 2); \tag{7}$$

$$g_1 = D_1\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{\alpha^2}\right);$$

$\psi(\gamma_1, \gamma_2)$ — функция углов поворота нормального волокна; $\varphi(\gamma_1, \gamma_2)$ — вспомогательная функция.

Подставляя равенства (4), (5) в уравнения (1)—(3), используя условия (6), (7) и производя несложные преобразования, получаем

$$-D_1\Delta_1\Delta_1 w + g_1\Delta_1\varphi = -q + \varepsilon_1\Delta_\varepsilon q; \tag{8}$$

$$g_3\frac{\partial^3\Delta_1 w}{\partial x\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda D_3\Delta_\lambda\psi + g_1\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \lambda k_2\psi\right) + g_1 g_4\frac{\partial^3\varphi}{\partial x\partial y^2} -$$

$$- g_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + g_2\frac{\partial^3 q}{\partial x\partial y^2} = 0; \tag{9}$$

$$-g_3\frac{\partial^3\Delta_1 w}{\partial x^2\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\lambda D_3\Delta_\lambda\psi + \frac{g_1}{\alpha^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \lambda k_2\psi\right) -$$

$$- g_1 g_4\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2\partial y} - \frac{g_1}{\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + g_5\frac{\partial^3 q}{\partial x^2\partial y} = 0, \tag{10}$$

где

$$\Delta_\varepsilon = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \Delta_\lambda = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}; \tag{11}$$

$$g_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 - \frac{D_3\varepsilon_1^2}{D_1} - \varepsilon_2^2\alpha^2 + \frac{D_3\varepsilon_2^2}{D_2};$$

$$g_3 = D_2\alpha^2\varepsilon_1 - \varepsilon_1 D_3 - D_1\varepsilon_2 + \alpha^2\varepsilon_2 D_3;$$

$$g_4 = -\frac{\varepsilon_1}{\alpha^2} + \frac{D_3}{k_1} + \varepsilon_2 - \frac{D_3}{k_2\alpha^2}; \tag{12}$$

$$g_5 = -\frac{\varepsilon_1^2}{\alpha^2} + \frac{D_3\varepsilon_1^2}{D_1} + \varepsilon_2\varepsilon_1 - \frac{D_3\varepsilon_2^2}{D_2}.$$

Вычитаем от уравнения (9) уравнение (10), предварительно умножив уравнение (9) на $\frac{1}{\alpha^2}$ и продифференцировав уравнения (9) и (10) соответственно по y и по x. После несложных преобразований с учетом соотношений (7), (8), (11) и (12) получаем

$$\Delta_1(\lambda D_3\Delta_\lambda\psi - \lambda k_2\psi) + \frac{g_3}{D_1}\cdot\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial y} - \frac{\varepsilon_2 D_3 g_1\alpha^2}{D_1\lambda k_2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Delta_\lambda q = 0. \tag{13}$$

Складывая уравнения (9) и (10), предварительно продифференцировав уравнение (9) по x, а уравнение (10) — по y, имеем

$$g_1\Delta_1\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \varphi\right) + (g_2 + g_5)\frac{\partial^4 q}{\partial x^2\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

Уравнения (8), (13) и (14) составляют полную систему уравнений для определения w, ψ и φ.

При решении системы (8), (13), (14) необходимо определить 10 констант Определяем их, используя шесть граничных условий и удовлетворяя уравнениям совместимости (9), (10). В случае трансверсальной изотропии, поскольку $g_1 = g_2 = g_3 = g_4 = g_5 = 0$, из этой системы следуют известные [4] уравнения изгиба трансверсально-изотропных пластин.

Пусть на ортотропную пластинку в форме полуплоскости $y \geqslant 0$, шарнирно опертую по краю $y = 0$, действует изгибающий момент $M_y|_{y=0} = M_0 \cos ax$. Граничные условия имеют вид

$$w|_{y=0} = 0; \quad \gamma_1|_{y=0} = 0; \quad M_y|_{y=0} = M_0 \cos ax. \tag{15}$$

Применим метод интегральных преобразований Фурье. Введем в рассмотрение трансформанты

$$\tilde{w} = \int_0^\infty w \cos pxdx; \tag{16}$$

$$\tilde{\psi} = \int_0^\infty \psi \sin pxdx; \tag{17}$$

$$\tilde{\varphi} = \int_0^\infty \varphi \cos pxdx. \tag{18}$$

Функции w, ψ, φ выражаются через трансформанты $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\varphi}$ по формулам обращения

$$w = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{w} \cos pxdp; \quad \psi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{\psi} \sin pxdp; \quad \varphi = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \tilde{\varphi} \cos pxdp, \tag{19}$$

а M_y можно выразить через γ_1, γ_2 с помощью формулы

$$M_y = D_2\left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial y} + \nu_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}\right). \tag{20}$$

Из выражений (8)—(10), (13)—(15), используя формулы (16)—(18) и (20), получаем систему основных уравнений

$$-D_2 \frac{d^4\tilde{w}}{dy^4} + 2p^2 \frac{D_1}{\alpha^2}\frac{d^2\tilde{w}}{dy^2} - D_1 p^4 \tilde{w} + \frac{g_1}{\alpha^2}\frac{d^2\tilde{\varphi}}{dy^2} - g_1 p^2 \tilde{\varphi} = 0; \tag{21}$$

$$\frac{d^4\tilde{\psi}}{dy^4} + \left(-\alpha^2 p^2 - \lambda^2 p^2 - \frac{k_1}{D_3}\right)\frac{d^2\tilde{\psi}}{dy^2} + \left(\lambda^2 p^4 \alpha^2 + \frac{k_1 \alpha^2}{D_3} p^2\right)\tilde{\psi} = 0; \tag{22}$$

$$-\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2\tilde{\varphi}}{dy^2} + p^2\tilde{\varphi} + \frac{p}{\alpha^2}\frac{d^3\tilde{\psi}}{dy^3} - p^3\frac{d\tilde{\psi}}{dy} = 0, \tag{23}$$

уравнений совместимости

$$-\frac{g_3 p}{\alpha^2}\frac{d^4\tilde{w}}{dy^4} + g_3 p^3 \frac{d^2\tilde{w}}{dy^2} + \frac{D_3}{\lambda}\frac{d^3\tilde{\psi}}{dy^3} + (-\lambda D_3 p^2 - g_1 p^2 - \lambda k_2) \times$$

$$\times \frac{d\tilde{\psi}}{dy} - g_1 g_4 p \frac{d^2\tilde{\varphi}}{dy^2} + g_1 p \tilde{\varphi} = 0; \tag{24}$$

$$\frac{g_3}{\alpha^2} p^2 \frac{d^3\tilde{w}}{dy^3} - g_3 p^4 \frac{d\tilde{w}}{dy} + \left(-\frac{D_3}{\lambda} p + \frac{g_1}{\alpha^2} p\right)\frac{d^2\tilde{\psi}}{dy^2} +$$

$$+ (\lambda D_3 p^3 + \lambda k_2 p)\tilde{\psi} + g_1\left(g_4 p^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)\frac{d\tilde{\varphi}}{dy} = 0 \tag{25}$$

и краевых условий при $y = 0$

$$\tilde{w} = 0; \quad \frac{\varepsilon_1}{\alpha^2} p \frac{d^2\tilde{w}}{dy^2} + (p - \varepsilon_1 p^3)\tilde{w} + \frac{1}{\lambda}\frac{d\tilde{\psi}}{dy} - \frac{g_1}{k_1} p \tilde{\varphi} = 0; \tag{26}$$

$$D_2\left\{-\varepsilon_2 \frac{d^4\tilde{w}}{dy^4} + (-1 + \alpha^2 \varepsilon_2 p^2)\frac{d^2\tilde{w}}{dy^2} - \lambda p \frac{d\tilde{\psi}}{dy} + \frac{g_1}{k_2 \alpha^2}\frac{d^2\tilde{\varphi}}{dy^2} + \right.$$

$$+ \nu_1 \left[\varepsilon_1 \frac{p^2}{\alpha^2} \frac{d^2\tilde{w}}{dy^2} + (p^2 - \varepsilon_1 p^4)\tilde{w} + \frac{1}{\lambda} p \frac{d\tilde{\psi}}{dy} - \frac{g_1}{k_1} p^2 \tilde{\varphi} \right] \Bigg\} =$$

$$= M_0 \frac{\pi}{2} [\delta(p-a) + \delta(p+a)], \qquad (27)$$

где $q = 0$; $\delta(p)$ — дельта-функция Дирака.

Учитывая, что $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\varphi}$ стремятся к нулю при $y \to \infty$, решения уравнений (21)—(23) получаем в виде

$$\begin{gathered} \tilde{w} = C_4 e^{-p\alpha y} + C_5 y e^{-p\alpha y} + \tilde{w}_1; \\ \tilde{\psi} = C_1 e^{-\lambda \sqrt{p^2 + \frac{k_2}{D_3}} y} + C_2 e^{-p\alpha y}; \\ \tilde{\varphi} = C_3 e^{-p\alpha y} + \tilde{\varphi}_1. \end{gathered} \qquad (28)$$

Здесь $\tilde{w}_1$, $\tilde{\varphi}_1$ — частные решения уравнений (21), (23), которые находим в виде

$$\begin{gathered} \tilde{w}_1 = -C_1 \frac{g_1 \lambda p \sqrt{p^2 + \frac{k_2}{D_3}}}{D_1 \left[\frac{\lambda^2 p^2}{\alpha^2} + \frac{k_1}{D_3 \alpha^2} - p^2 \right]} e^{-\lambda \sqrt{p^2 + \frac{k_2}{D_3}} y}; \\ \tilde{\varphi}_1 = -C_1 \lambda p \sqrt{p^2 + \frac{k_2}{D_3}} e^{-\lambda \sqrt{p^2 + \frac{k_2}{D_3}} y}. \end{gathered} \qquad (29)$$

Подставляя решения (28), (29) в краевые условия (26), (27) и уравнения совместимости (24), (25), определяем константы C_1, C_2, C_3, C_4, C_5:

$$C_1 = \frac{M_0 \frac{\pi}{2} D_1 p \left(\frac{\lambda^2 p^2}{\alpha^2} + \frac{k_1}{D_3 \alpha^2} - p^2 \right) [\delta(p-a) + \delta(p+a)]}{\lambda^2 \sqrt{p^2 + \frac{k_2}{D_3}} \left(g_6 p^4 + 2 \frac{k_2 \lambda}{\alpha^2} g_1 p^2 - \frac{k_1 k_2 D_2}{D_3} \right)};$$

$$C_2 = M_0 \frac{g_3 \pi p^3 \alpha \left(\frac{\lambda p}{\alpha^2} + \frac{k_1}{\lambda p D_3 \alpha^2} - \frac{p}{\gamma} \right) [\delta(p-a) + \delta(p+a)]}{2 \left\{ g_6 p^4 + 2 \frac{k_2 \lambda}{\alpha^2} g_1 p^2 - \frac{k_1 k_2 D_2}{D_3} \right\}};$$

$$C_3 = 0; \qquad (30)$$

$$C_4 = \frac{M_0 \pi g_1 p^2 [\delta(p-a) + \delta(p+a)]}{2\lambda \left(g_6 p^4 + \frac{2\lambda k_2}{\alpha^2} g_1 p^2 - \frac{k_1 k_2 D_2}{D_3} \right)};$$

$$C_5 = -\frac{M_0 \pi \left(\lambda D_3 p^2 - \frac{D_3}{\lambda} p^2 \alpha^2 + g_1 p^2 + \lambda k_2 \right) \left(\frac{\lambda p}{\alpha} + \frac{k_1}{\lambda p D_3 \alpha} - \frac{p\alpha}{\lambda} \right) [\delta(p-a) + \delta(p+a)]}{4 \left(g_6 p^4 + 2 \frac{\lambda k_2}{\alpha^2} g_1 p^2 - \frac{k_1 k_2 D_2}{D_3} \right)}.$$

Здесь $g_6 = D_3 \left(-\lambda^2 D_2 + 2\alpha^2 D_2 - \frac{D_1}{\lambda^2} \right)$.

Подставляя равенства (30) в (29), (28) и на основании работ [2, 3] считая $a > 0$, реализуем обратное преобразование Фурье (19). Получаем w, ψ, φ в виде

$$w = \frac{\pi g_1 M_0 a^2}{2\lambda S_1} e^{-a\alpha y} \cos ax - \frac{\pi M_0 \left(\lambda D_3 a^2 - \frac{D_3}{\lambda} a^2 \alpha^2 + g_1 a^2 + \lambda k_2 \right) \alpha S_2}{4 S_1} \times$$

$$\times y e^{-a\alpha y} \cos ax - \frac{\pi g_1 a^2 M_0}{2\lambda S_1} e^{-y\lambda \sqrt{a^2 + \frac{k_2}{D_3}}} \cos ax; \qquad (31)$$

$$\psi = \frac{M_0 D_1 a^2 S_2 \sin ax}{\lambda \sqrt{a^2 + \frac{k_2}{D_3}} S_1} e^{-y\lambda \sqrt{a^2 + \frac{k_2}{D_3}}} + \frac{M_0 g_3 a^3 \alpha S_2}{S_1} e^{-a\lambda y} \sin ax; \qquad (32)$$

$$\varphi = -\frac{M_0 D_1 a^3 S_2}{S_1} e^{-y\lambda \sqrt{a^2 + \frac{k_2}{D_3}}} \cos ax, \qquad (33)$$

где

$$S_1 = g_6 a^4 + \frac{2\lambda k_2}{\alpha^2} g_1 a^2 - \frac{k_1 k_2 D_2}{D_3};$$
$$S_2 = \frac{\lambda a}{\alpha^2} + \frac{k_1}{a\lambda D_3 \alpha^2} - \frac{a}{\lambda}. \qquad (34)$$

На основании работы [4] можно легко определить усилия и моменты в пластинке.

В случае трансверсальной изотропии получаем

$$w = \frac{M_0}{2aD} y e^{-ay} \cos ax.$$

Если сделать замену $x = -\frac{\pi}{2a} + \tilde{\chi}$, то получим

$$M_y|_{y=0} = M_0 \sin a\tilde{x}; \quad w = \frac{M_0}{2aD} y e^{-ay} \sin a\tilde{x},$$

что совпадает с результатами работы [1], полученными в случае трансверсальной изотропии.

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин.— М. : Наука, 1967.— 266 с.
2. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление.— М. : Наука, 1974.— 542 с.
3. *Корн Т., Корн Г.* Справочник по математике.— М. : Наука, 1970.— 720 с.
4. *Пелех Б. Л.* Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. — Киев : Наук. думка, 1973.— 248 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР
Львовский политехнический институт

Поступила в редколлегию
20.06.78

УДК 539.3

Б. Н. Полевой

ТЕМПЕРАТУРНЫЙ ИЗГИБ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В рамках классической теории Кирхгофа — Лява [1] изучено распределение температурных напряжений в изотропных пластинках, ослабленных криволинейными отверстиями. На базе уравнений теории пластин типа С. П. Тимошенко [3, 5] определена концентрация температурных напряжений возле отверстий в трансверсально-изотропных пластинках. Для пластин, изготовленных из современных композиционных материалов, при исследовании концентрации температурных напряжений около отверстий необходимо учитывать анизотропию механических и температурных свойств. Такому исследованию посвящена настоящая работа, в которой определено влияние трансверсальных механических и температурных характеристик материала на распределение температурных напряжений при изгибе пластинок, ослабленных криволинейными отверстиями. Численные расчеты произведены для нескольких видов отверстий, наиболее чаще встречающихся в инженерной практике.