УДК 536.12

В. М. Вигак

О РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ

Важное применение в задачах механики при расчетах устойчивости, колебаний, упругого и термоупругого состояний кусочно-однородных (с точки зрения жесткости и свойств материала) элементов конструкций нашли в в последнее время обобщенные функции [1—11], в первую очередь единичная функция Хевисайда и δ-функция Дирака, которые позволяют соответствующие расчеты для неоднородного тела, состоящего из отдельных элементов постоянной жесткости либо изготовленного из однородного материала, включающего в себя отдельные сосредоточенные факторы, свести к решению одной математической задачи, исключив трудоемкий метод сопряжения между отдельными однородными элементами, применяемый ранее при таких расчетах.

Значение такого подхода, на наш взгляд, не ограничивается удобством и простотой. Полученные при этом аналитические выражения для искомых величин могут быть с успехом применены и при расчетах неоднородных элементов конструкций путем соответствующей замены неоднородного тела моделью кусочно-однородного. Данный метод решения задач механики для неоднородных тел с применением ЭВМ на завершающем этапе решения задачи при доведении расчетов до числа, очевидно, будет иметь преимущество в быстроте и точности расчетов по сравнению с известными прямыми численными методами решения таких задач.

Задачи механики для кусочно-однородных тел с применением обобщенных функций сводятся к решению дифференциального уравнения либо системы уравнений с разрывными и сингулярными коэффициентами. Идея решения таких уравнений заключается в том, что полученный дифференциальный оператор разделяется, по-существу, на сумму двух — регулярного и сингулярного операторов — с последующим решением уравнений относительно регулярного оператора [8—10]. Такой подход сводит решение исходных дифференциальных уравнений к решению алгебраической системы уравнений относительно значений искомой функции и ее производных в точках сингулярности исходного дифференциального оператора.

Ниже применительно к одномерной задаче теплопроводности для кусочно-однородных тел (неограниченной пластины, сплошных и полых цилиндров и сфер) предлагается прямой подход к решению одного дифференциального уравнения второго порядка с разрывными и сингулярными коэффициентами фактически без использования свойств δ-функции. Единственно, что здесь понадобилось, это очевидное тождество

$$\frac{d}{dx}[S(x)]\,x_+ \equiv 0,$$

где

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 1, & x > 0; \end{cases} \qquad x_+ = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Покажем применение предлагаемого подхода на примере решения уравнения для стационарной задачи теплопроводности.

Рассмотрим решение уравнения

$$x^{-m}[x^m\lambda(x)\,y'(x)]' = f(x) \qquad (x \in [k,\ 1],\quad k \in [0,\ 1),\quad m = 0,\ 1,\ \ldots,\ l), \tag{1}$$

где

$$\lambda(x) = \lambda_1 + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) S(x - x_i) \qquad (\lambda_i = \mathrm{const}, \quad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

$$0 \leqslant k < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < 1);$$

$S(x - x_i)$ — упомянутая выше симметричная единичная функция; $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция с разрывами первого рода.

Уравнение (1), которое можно переписать в виде

$$\lambda(x) y''(x) + [mx^{-1}\lambda(x) + \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \delta(x - x_i)] y'(x) = f(x),$$

где

$$\delta(x - x_i) = \frac{d}{dx} [S(x - x_i)],$$

описывает стационарное температурное поле кусочно-однородных пластины ($m = 0$), полых и сплошных цилиндров ($m = 1$) и сфер ($m = 2$), состоящих из n однородных слоев.

Отметим, что температура слоистого тела является непрерывной функцией координат с разрывами первого рода в точках сопряжения ее первой производной по нормали к поверхности сопряжения. Вторая производная в этих же точках, очевидно, имеет сингулярности типа δ-функции.

Следовательно, применительно к температурному полю решение уравнения (1) будем искать в виде

$$y(x) = y_m(x) + \sum_{i=2}^{n} (x - x_i)_+ \, y_{i,m}(x) \qquad (x \in [k,\ 1]). \tag{2}$$

Здесь

$$y_m(x),\ y_{i,m}(x) \in C^{(2)}(k,\ 1); \qquad (x - x_i)_+ = \begin{cases} 0, & x < x_i; \\ x - x_i & x \geqslant x_i, \end{cases}$$

т. е. $y(x) \in C^{(0)}(k,\ 1)$.

Подставив решение (2) в уравнение (1), найдем

$$\lambda_1 x^{-m} [x^m y_m'(x)]' + \lambda_1 x^{-m} \left\{ x^m \sum_{i=2}^{n} [(x - x_i)_+ \, y_{i,m}(x)]' \right\}' +$$

$$+ x^{-m} \left\{ x^m \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) S(x - x_i) \left[y_m(x) + \sum_{i=2}^{n} (x - x_i)_+ \, y_{i,m}(x) \right]' \right\}' =$$

$$= f(x), \tag{3}$$

откуда при $x < x_2$ должно выполняться очевидное равенство

$$\lambda_1 [x^m y_m'(x)]' = x^m f(x), \tag{4}$$

справедливое при $x \in [k,\ 1]$.

Решение уравнения (4) можно записать в виде

$$y_m(x) = A + Bx^{-m+1} + \frac{1}{m-1} \int_k^x \eta (1 - x^{-m+1} \eta^{m-1}) f(\eta) \, d\eta$$

$$(m = 0,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l). \tag{5}$$

$$y_1(x) = A + B \ln x + \int_k^x \eta \ln \frac{x}{\eta} f(\eta) \, d\eta,$$

где A, B — неизвестные произвольные постоянные.

Теперь с учетом равенства (4) уравнение (3) можно переписать так:

$$\lambda_1 \left\{ x^m \sum_{i=2}^{n} [(x - x_i)_+ y_{i,m}(x)]' \right\}' + \left\{ x^m \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) S(x - x_i) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{i=2}^{n} [(x - x_i)_+ ' y_{i,m}(x)]' \right\}' + \left\{ x^m \sum_{i=2}^{n} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) S(x - x_i) y_m'(x) \right\}' = 0. \qquad (6)$$

После интегрирования и несложных преобразований решение уравнения (6) сводится к решению системы уравнений

$$\lambda_2 [(x - x_2)_+ y_{2,m}(x)]' + (\lambda_2 - \lambda_1) S(x - x_2) y_m'(x) = 0;$$

$$\lambda_3 [(x - x_3)_+ y_{3,m}(x)]' + (\lambda_3 - \lambda_2) S(x - x_3) [(x - x_2)_+ y_{2,m}(x)]' +$$

$$+ (\lambda_3 - \lambda_2) S(x - x_3) y_m'(x) = 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda_n [(x - x_n)_+ y_{n,m}(x)]' + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) S(x - x_n) \left[\sum_{i=2}^{n-1} (x - x_i)_+ y_{i,m}(x) + \right.$$

$$\left. + y_m(x) \right]' = 0,$$

которое имеет вид

$$(x - x_i)_+ y_{i,m}(x) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i} - \frac{\lambda_1}{\lambda_{i-1}} \right) S(x - x_i) [y_m(x) - y_m(x_i)]. \qquad (7)$$

Итак, учитывая выражения (2), (5), (7), решение уравнения (1) можно записать в следующем виде:

$$y(x) = A + B \left[x + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i} - \frac{\lambda_1}{\lambda_{i-1}} \right) (x - x_i)_+ \right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1} \int_k^x (x - \eta) f(\eta) \, d\eta + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_{i-1}} \right) S(x - x_i) \times$$

$$\times \left[\int_k^x (x - \eta) f(\eta) \, d\eta - \int_k^{x_i} (x_i - \eta) f(\eta) \, d\eta \right] \qquad (m = 0);$$

$$y(x) = A + B \left[\ln x + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i} - \frac{\lambda_1}{\lambda_{i-1}} \right) S(x - x_i) \ln \frac{x}{x_i} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1} \int_k^x \eta \ln \frac{x}{\eta} f(\eta) \, d\eta + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_{i-1}} \right) S(x - x_i) \times$$

$$\times \left[\int_k^x \eta \ln \frac{x}{\eta} f(\eta) \, d\eta - \int_k^{x_i} \eta \ln \frac{x_i}{\eta} f(\eta) \, d\eta \right] \qquad (m = 1);$$

$$y(x) = A + B \left[x^{-m+1} + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_i} - \frac{\lambda_1}{\lambda_{i-1}} \right) S(x - x_i) (x^{-m+1} - x_i^{-m+1}) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1 (m - 1)} \int_k^x \eta (1 - x^{-m+1} \eta^{m-1}) f(\eta) \, d\eta + \frac{1}{m - 1} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_{i-1}} \right) \times$$

$$\times S(x - x_i) \left[\int_k^x \eta (1 - x^{-m+1} \eta^{m-1}) f(\eta) \, d\eta - \right.$$

$$\left. - \int_k^{x_i} \eta (1 - x_i^{-m+1} \eta^{m-1}) f(\eta) \, d\eta \right] \qquad (m = 2, 3, \dots, l).$$

Полученное здесь решение уравнения (1) при $m = 0.1$ полностью совпадает с решением, полученным в работах [2—4,7] путем указанного выше разложения дифференциального оператора на регулярную и сингулярную составляющие.

1. *Гульчевский Л. С., Кулик А. Н.* Двумерная задача теплопроводности для многослойных тел.— ФХОМ, 1976, № 3, с. 33—38.
2. *Колесов В. С., Власов Н. М., Процюк Б. В.* Температурные напряжения в круглой многослойной пластине.— В кн.: Математические методы в термомеханике.— Киев : Наук. думка, 1978, с. 41—51.
3. *Коляно Ю. М.* Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 7, с. 7—11.
4. *Коляно Ю. М., Иванык Е. Г.* Периодическое температурное поле в составном цилиндре.— ФХОМ, 1976, № 6, с. 45—49.
5. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Термоупругость многослойных тел.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1112—1117.
6. *Коляно Ю. М., Процюк Б. В.* Термоупругость многослойного цилиндра.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1976, № 8, с. 718—721.
7. *Коляно Ю. М., Процюк Б. В.* Термоупругость полого слоистого цилиндра.— ФХОМ, 1977, № 3, с. 12—17.
8. *Лазарян В. А., Конашенко С. И.* Обобщенные функции в задачах механики.— К.: Наук. думка, 1974.— 192 с.
9. *Образцов И. Ф., Онанов Г. Г.* Строительная механика скошенных тонкостенных систем.— М.: Машиностроение, 1973.— 660 с.
10. *Онанов Г. Г.* Уравнения с сингулярными коэффициентами типа дельта-функции и ее производных.— Докл. АН СССР, 1970, 191, № 5, с. 997—1000.
11. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М., Громовык В. И., Лозбень В. Л.* Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплообмена. — Киев: Наук. думка, 1977.— 160 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
16.11.78

УДК 539.3

Б. Л. Пелех, О. С. Гаврылив

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Рассмотрим пластинку, выполненную из армированного пластика. Считаем ее материал ортотропным. Отнесем срединную поверхность пластинки к ортогональным координатам x, y. Углы поворотов волокон, нормальных к срединной поверхности, в направлениях осей x, y обозначим соответственно γ_1, γ_2, прогиб срединной поверхности — w.

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид

$$k_1\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+k_2\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+q=0; \tag{1}$$

$$D_1\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x^2}+D_3\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial y^2}+(D_{12}+D_3)\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x\partial y}-k_1\left(\gamma_1+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0; \tag{2}$$

$$D_3\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial x^2}+D_2\frac{\partial^2\gamma_2}{\partial y^2}+(D_{12}+D_3)\frac{\partial^2\gamma_1}{\partial x\partial y}-k_2\left(\gamma_2+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0, \tag{3}$$

где D_1, D_2 — жесткости на изгиб в срединной плоскости в направлениях соответственно x, y; k_1, k_2 — жесткости на сдвиг; D_3 — жесткость на кручение; $D_{12}=D_1\nu_2=D_2\nu_1$; ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона. Принимаем, что

$$\gamma_1=-\frac{\partial w}{\partial x}-\varepsilon_1\frac{\partial}{\partial x}\Delta_1 w+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{g_1}{k_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\varepsilon_1^2}{D_1}\frac{\partial q}{\partial x}; \tag{4}$$

$$\gamma_2=-\frac{\partial w}{\partial y}-\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial y}\Delta_2 w-\lambda\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{g_1}{k_2\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\varepsilon_2^2}{D_2}\frac{\partial q}{\partial y} \tag{5}$$