УДК 536.12—539.376

Ю. М. Коляно, Е. Г. Грицько

О ПРИМЕНЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ЛОКАЛЬНО НАГРЕВАЕМЫХ ПО ТОРЦАМ ПЛАСТИНКАХ

Рассмотрим ортотропную полосу-пластинку $|x| \leqslant l$, нагреваемую по зоне $|y| \leqslant h$ поверхности $x = l$ внешней средой, температура которой $t_0(y)$ — симметричная функция. Через поверхности $|x| = l$ и $|z| = \delta$ осуществляется теплообмен с внешней средой, температура которой всюду равна нулю, кроме зоны нагрева $|y| \leqslant h$ поверхности $x = l$. Для определения установившегося температурного поля пластинки имеем известное [1] уравнение теплопроводности

$$\Delta T = \varkappa^2 T \tag{1}$$

и граничные условия

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=l} = -h_1 T|_{x=l} - [(h_0(y) - h_1) T|_{x=l} - h_0(y) t_0(y)] N(y); \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=-l} = h_3 T|_{x=-l}, \tag{3}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $k_\lambda^2 = \frac{\lambda_y}{\lambda_x}$; $h_0(y) = \frac{\alpha_0(y)}{\lambda_x}$; $h_1 = \frac{\alpha_1}{\lambda_x}$; $h_3 = \frac{\alpha_3}{\lambda_x}$; λ_x, λ_y — коэффициенты теплопроводности вдоль координатных осей x, y; $\varkappa^2 = \alpha/\lambda_x\delta$; α — коэффициент теплоотдачи с поверхностей $z = \pm\delta$; $\alpha_0(y)$ — симметричная функция, описывающая поведение коэффициента теплоотдачи в области $|y| \leqslant h$ поверхности $x = l$; α_1 — коэффициент теплоотдачи с этой поверхности за пределами области $|y| \leqslant h$; α_3 — коэффициент теплоотдачи с поверхности $x = -l$; $N(y) = S_-(y + h) - S_+(y - h)$;

$$S_\pm(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \zeta < 0; \\ 0{,}5 \mp 0{,}5 & \text{при } \zeta = 0; \\ 1 & \text{при } \zeta > 0. \end{cases}$$

Применяя к соотношениям (1) — (3) интегральное преобразование Фурье по переменной y, получаем

$$\frac{d^2\bar{T}}{dx^2} = (k_\lambda^2 \xi^2 + \varkappa^2)\bar{T}; \tag{4}$$

$$\left.\frac{d\bar{T}}{dx}\right|_{x=l} + h_1\bar{T}|_{x=l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{f_0(\xi) - \int_{-h}^{h}[h_0(y) - h_1] T(l, y)\cos\xi y dy\right\}; \tag{5}$$

$$\left.\frac{d\bar{T}}{dx}\right|_{x=-l} - h_3\bar{T}|_{x=-l} = 0, \tag{6}$$

где

$$f_0(\xi) = \int_{-h}^{h} h_0(y) t_0(y)\cos\xi y dy.$$

Из равенств (4) — (6) видно, что решение задачи (1) — (3) сводится к нахождению зависимости температурного поля на отрезке $|y| \leqslant h$ поверхности $x = l$.

Представляя T на этом отрезке аналогично работам [2, 3] в виде

$$T_r(l, y) = \sum_{m=0}^{M} d_m \psi_m(y) \tag{7}$$

и подставляя (7) в (5), получаем

$$\left.\frac{d\bar{T}_r}{dx}\right|_{x=l} + h_1\bar{T}_r|_{x=l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[f_0(\xi) - \sum_{m=0}^{M} d_m \Psi_m(\xi)\right]. \tag{8}$$

Здесь

$$d_m = c_m \int_{-h}^{h} T_r(l,\ y)\, \gamma_0(y)\, \psi_m(y)\, dy; \tag{9}$$

$\{\psi_m(y)\ (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ M)\}$ — ортогональная система функций с весом $\gamma_0(y)$ на отрезке $|y| \leqslant h$; c_m — коэффициенты нормировки;

$$\Psi_m(\xi) = \int_{-h}^{h} [h_0(y) - h_1]\, \psi_m(y) \cos \xi y dy. \tag{10}$$

Решив краевую задачу (4), (6), (8) и перейдя в найденном решении к оригиналу, получим

$$T_r = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[f_0(\xi) - \sum_{m=0}^{M} d_m \Psi_m(\xi) \right] \varphi(x) \cos \xi y d\xi, \tag{11}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{(h_3 - \gamma)\, e^{-\gamma(l+x)} - (h_3 + \gamma)\, e^{\gamma(l+x)}}{e^{-2\gamma l}(h_1 - \gamma)(h_3 - \gamma) - e^{2\gamma l}(h_1 + \gamma)(h_3 + \gamma)};$$

$$\gamma = \sqrt{k_\lambda^2 \xi^2 + \varkappa^2}.$$

Подставляя равенство (11) в (9), приходим к системе

$$d_m = \frac{c_m}{\pi} \int_0^{\infty} \left[f_0(\xi) - \sum_{n=0}^{M} d_n \Psi_n(\xi) \right] \varphi(l)\, \Phi_m(\xi)\, d\xi. \tag{12}$$

Здесь

$$\Phi_m(\xi) = \int_{-h}^{h} \psi_m(y)\, \gamma_0(y) \cos \xi y dy. \tag{13}$$

Решив систему (12) и подставив значения d_m в (11), получим формулу для определения температурного поля в полосе-пластинке.

Решение (11) точно удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) и в общем случае приближенно — граничному условию (2). Чтобы оценить погрешность решения (11), рассмотрим функцию $\delta T = T - T_r$, где T — точное решение краевой задачи (1) — (3).

Поскольку T и T_r удовлетворяют уравнению (1), то δT есть также решение этого уравнения. Известно, что для решений уравнения (1) применим принцип максимума [4], из которого следует, что максимальное по модулю значение функция δT принимает только на поверхностях $x = \pm\, l$.

Для оценки этого максимального значения рассмотрим функции

$$V(y) = \left\{ \frac{\partial T_r}{\partial x} \bigg|_{x=l} + h_1 T_r |_{x=l} + [(h_0(y) - h_1)\, T_r|_{x=l} - h_0(y)\, t_0(y)]\, N(y) \right\} \frac{l}{t_0(0)};$$

$$W(y) = \left(\frac{\partial T_r}{\partial x} \bigg|_{x=-l} - h_3 T_r |_{x=-l} \right) \frac{l}{t_0(0)}. \tag{14}$$

Учитывая, что $T_r = T - \delta T$, получаем следующие соотношения между $V(y)$, $W(y)$ и δT:

$$V(y) = -\left[\frac{\partial \delta T}{\partial x} \bigg|_{x=l} + h_1 \delta T |_{x=l} + (h_0(y) - h_1)\, \delta T |_{x=l} N(y) \right] \frac{l}{t_0(0)};$$

$$W(y) = \left(h_3 \delta T |_{x=-l} - \frac{\partial \delta T}{\partial x} \bigg|_{x=-l} \right) \frac{l}{t_0(0)}.$$

Заметив также, что в точке максимального значения функции $|\delta T|$ производная по внешней нормали $\frac{\partial \delta T}{\partial n}$ и сама δT одного знака, можно сделать такой вывод: функции $V(y)$ и $W(y)$ позволяют оценить максимальную погрешность в определении температурного поля ортотропной пластинки и выбрать тем самым оптимальную величину M для численных расчетов с заданной точностью.

Заменив в (11), (12) и (14) T, T_r, x, y, $t_0(y)$, l, ξ, h, $h_0(y)$, h_1, h_3, d_m, $\varkappa^2$, c_m соответственно на $\theta = \frac{T}{t_0(0)}$; $\theta_r = \frac{T_r}{t_0(0)}$; $X = \frac{x}{l}$; $Y = \frac{y}{l}$; $\theta_0(Y) = \frac{t_0(Y)}{t_0(0)}$; 1; $\eta = l\xi$; $\varepsilon = \frac{h}{l}$; $\mathrm{Bi}_0(Y) = h_0(Y)\,l$; $\mathrm{Bi}_1 = h_1 l$; $\mathrm{Bi}_3 = h_3 l$; $D_m = \frac{d_m}{t_0(0)}$; $\mathrm{Bi} = \varkappa^2 l^2$; $C_m = c_m l$, нетрудно представить решение задачи в безразмерном виде.

Рассмотрим случай, когда

$$\theta_0(Y) = 1 - S_-(|Y| - \varepsilon_0) + (b - k|Y|)\,[S_-(|Y| - \varepsilon_0) - S_-(|Y| - \varepsilon)];$$

$$\mathrm{Bi}_0(Y) = B_0\,[1 - S_-(|Y| - \varepsilon_0)] + B_0(b - k|Y|) \times$$
$$\times [S_-(|Y| - \varepsilon_0) - S_-(|Y| - \varepsilon)] + \mathrm{Bi}_1,$$

где

$$k = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0}; \quad b = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0}.$$

В качестве ортогональной системы функций выберем тригонометрический ряд. Тогда

$$\psi_m(Y) = \cos\frac{m\pi Y}{\varepsilon}; \quad C_m = \frac{S(m)}{\varepsilon}; \quad \gamma_0(Y) \equiv 1;$$

$$f_0(\eta) = 2(B_0 + \mathrm{Bi}_1)\,\varepsilon_0\frac{\sin\gamma_2}{\gamma_2} + 2B_0k^2\left\{\frac{2}{\eta^2}(\varepsilon\cos\gamma_1 - \varepsilon_0\cos\gamma_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\eta^3}\,[(\gamma_1^2 - 2)\sin\gamma_1 - (\gamma_2^2 - 2)\sin\gamma_2]\right\} - 2k\,(2B_0b + \mathrm{Bi}_1) \times$$
$$\times \left[\frac{1}{\eta^2}(\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2) + \frac{1}{\eta}(\varepsilon\sin\gamma_1 - \varepsilon_0\sin\gamma_2)\right] +$$
$$+ 2\,(B_0b^2 + \mathrm{Bi}_1 b)\left(\varepsilon\frac{\sin\gamma_1}{\gamma_1} - \varepsilon_0\frac{\sin\gamma_2}{\gamma_2}\right);$$

$$\Psi_m(\eta) = B_0\varepsilon(1 - b)\left[\frac{\sin(\gamma_2 + m\beta)}{\gamma_2 + m\beta} + \frac{\sin(\gamma_2 - m\beta)}{\gamma_2 - m\beta}\right] - B_0k\left\{\frac{\varepsilon^2}{(\gamma_1 + \pi m)^2} \times \right.$$
$$\times [(-1)^m\cos\gamma_1 - \cos(\gamma_2 + m\beta)] + \frac{\varepsilon}{\gamma_1 + \pi m}\,[(-1)^m\varepsilon\sin\gamma_1 - \varepsilon_0\sin(\gamma_2 +$$
$$+ m\beta)] + \frac{\varepsilon^2}{(\gamma_1 - m\pi)^2}\,[(-1)^m\cos\gamma_1 - \cos(\gamma_2 - m\beta)] +$$
$$\left. + \frac{\varepsilon}{\gamma_1 - \pi m}\,[(-1)^m\varepsilon\sin\gamma_1 - \varepsilon_0\sin(\gamma_2 - m\beta)]\right\} +$$
$$+ 2bB_0\left[(-1)^m\varepsilon\sin\gamma_1\,\frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 - m^2\pi^2}\right];$$

$$\Phi_m(\eta) = \frac{\varepsilon}{\gamma_1 + m\pi}\sin(\gamma_1 + m\beta) + \frac{\varepsilon}{\gamma_1 - m\pi}\sin(\gamma_1 - m\beta);$$

$$\gamma_1 = \eta\varepsilon; \quad \gamma_2 = \eta\varepsilon_0; \quad \beta = \frac{\pi\varepsilon_0}{\varepsilon}.$$

Результаты вычислений, произведенных по формулам (11), (12), (14) при $B_0 = 0{,}91$, $\mathrm{Bi}_1 = 0{,}015$, $\mathrm{Bi}_3 = 0{,}01$, $k_\lambda = 1$, представлены на рис. 1—3. Для $\varepsilon = 0{,}3$, $\varepsilon_0 = 0{,}29$ на рис. 1 показана зависимость температурного поля (кривые *1—8*) и функции $V(Y)$ при $M = 0$ (кривые *9*, *10*) от координаты Y при $\mathrm{Bi} = 10^{-4}$ (кривые *1—4*, *9*) и $\mathrm{Bi} = 0{,}1$ (кривые *5—10*). Кривые *1*, *5* соответствуют $X = 1$, кривые *2*, *6* — $X = 0{,}7$, кривые *3*, *7* — $X = 0$, кривые *4*, *8* — $X = -1$. На рис. 2 при $\varepsilon = 0{,}3$, $\varepsilon_0 = 0{,}29$ показано изменение температурного поля в зависимости от координаты X: кривые *1*, *5* для $Y = 0$, кривые *2*, *6* для $Y = 0{,}29$, кривые *3*, *7* для $Y = 0{,}5$ и кривые *4*, *8* для $Y = 1$. Кривые *1—4* соответствуют $\mathrm{Bi} = 10^{-4}$, кривые *5—8* — $\mathrm{Bi} = 0{,}1$. На рис. 3 представлено изменение температурного поля в зависимости от ε в точках $X = 1$, $Y = 0$ (кривая *1*), $X = -1$, $Y = 0$ (кривая *2*), $X = 1$, $Y = \varepsilon_0$ (кривая *3*), $X = -1$, $Y = \varepsilon_0$ (кривая *4*). Значению $M = 0$ соответствует штриховая кривая, $M = 1$ — штрихпунктирная и $M = 2, 3, 4$ — сплошная. Расчет производился при $\mathrm{Bi} = 10^{-4}$, $\varepsilon_0 = 0{,}95\,\varepsilon$. Проведенные расчёты показали, что $\max\limits_{Y} |V(Y)| > \max\limits_{Y} |W(Y)|$. Следовательно, для оценки погрешности при расчете температурного поля достаточно ограничиться исследованием функции $V(Y)$.

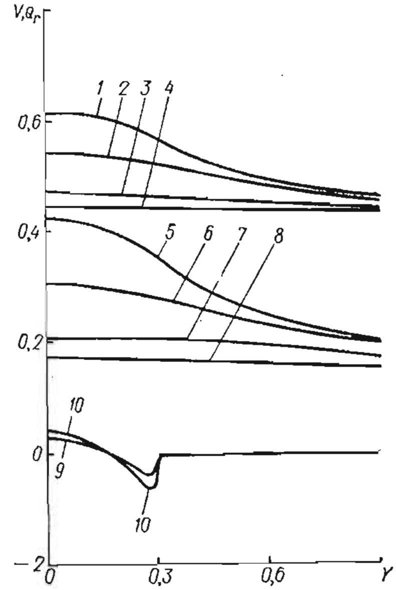

Рис. 1

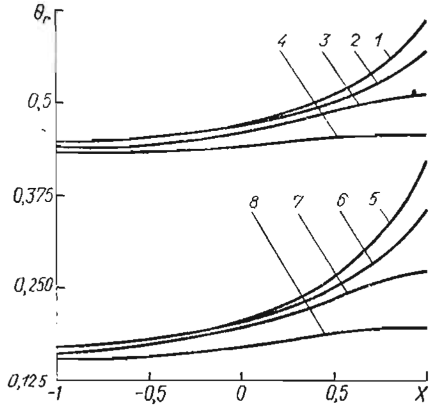

Рис. 2

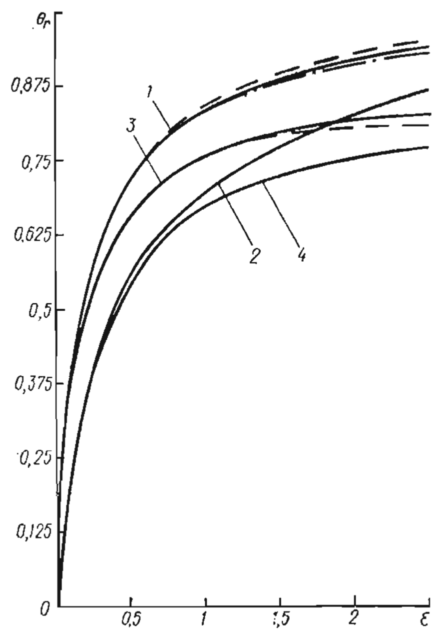

Рис. 3

Значение температурного поля, рассчитанного при $M = 0$ и $M = 4$, отличается для указанных выше значений параметров менее чем на 0,3% (см. рис. 1, 2).

1. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев : Наук. думка, 1972.— 308 с.
2. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* Узкозональный нагрев тел.— ФХОМ, 1977, № 3, с. 149—152.
3. *Коляно Ю. М., Грицько Е. Г.* Температурное поле в массивных телах при смешанных граничных условиях.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 2, с. 132—136.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1966.— 724 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
24.10.78