

1. Бурак Я. И., Будз С. Ф. Об определении оптимальных режимов нагрева тонкой сферической оболочки. — Прикл. механика, 1974, 10, № 2, с. 14—20.
2. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. — К.: Вид-во АН УРСР, 1961. — 212 с.

Институт прикладных проблем механики  
и математики. АН УССР

Поступила в редколлегию  
19.04. 78

УДК 539.377

С. Ф. Будз, Н. Г. Гачкевич

### ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ НАГРЕВА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛОЧКИ

Определим оптимальные по напряжениям режимы нагрева кусочно-однородной теплоизолированной на внутренней поверхности цилиндрической оболочки радиуса  $R$  и постоянной толщины  $2h$ . В качестве функции управления принимаем переменную во времени температуру внешней поверхности оболочки  $t^+(\tau)$ . В дальнейшем будем пренебрегать возмущениями температурного поля в окрестности сечений сопряжения, т. е. принимать, что температурное поле зависит только от координаты  $\gamma$  ( $-h \leq \gamma \leq h$ ) и времени  $\tau$ .

Примем, что температура по толщине оболочки изменяется по кубическому закону [1], который записывается в виде

$$t_j(\gamma, \tau) = \frac{a_j^2 h^2}{2} \left( \frac{\gamma^2}{h^2} - \frac{1}{3} \right) \frac{dT_{1j}}{d\tau} + \frac{a_j^2 h \gamma}{2} \left( \frac{\gamma^2}{3h^2} - \frac{1}{5} \right) \times \\ \times \frac{dT_{2j}}{d\tau} + T_{1j} + \frac{\gamma}{h} T_{2j}. \quad (1)$$

Здесь индексы  $j = 1, 2, 3$  введены для обозначения величин, относящихся к областям однородности  $-b \leq z \leq -c-1$ ;  $-c \leq z \leq c-2$  и  $c \leq z \leq b-3$  (рис. 1), где  $z$  — осевая координата;  $a_j^{-2} = \frac{\lambda_j}{c_j \rho_j}$  — коэффициент температуропроводности;  $\lambda_j$  — коэффициент теплопроводности;  $c_j$  — удельная теплоемкость;  $\rho_j$  — плотность материала;  $\tau$  — время;

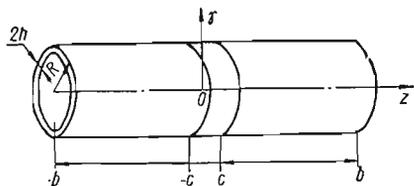


Рис. 1

$$T_{1j} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h t_j(\tau, \gamma) d\gamma;$$

$$T_{2j} = \frac{3}{2h^2} \int_{-h}^h \gamma t_j(\tau, \gamma) d\gamma$$

— усредненная температура и температурный момент, которые должны удовлетворять системе уравнений теплопроводности

$$\frac{a_j^2 h^2}{5} \frac{dT_{2j}}{d\tau} + \frac{4}{3} T_{2j} + T_{1j} = t^+(\tau); \\ a_j^2 h^2 \frac{dT_{2j}}{d\tau} - \frac{5}{2} a_j^2 h^2 \frac{dT_{1j}}{d\tau} + \frac{5}{2} T_{2j} = 0. \quad (2)$$

Пусть температура оболочки в начальный момент времени постоянна и равна  $t_0$ . Тогда на основании закона (1) для  $T_{1j}$ ,  $T_{2j}$  получаем начальные условия

$$T_{1j}(0) = t_0; \quad \dot{T}_{1j}(0) = 0; \quad T_{2j}(0) = 0; \quad \dot{T}_{2j}(0) = 0. \quad (3)$$

При этом согласно системе (2)  $t^+(0) = t_0$ . Точка над буквой обозначает производную по  $\tau$ .

Предположим, что на краях оболочки выполняются условия закрепления:  $N_1(\pm b) = 0$ ;  $\dot{\omega}(\pm b) = 0$ ;  $\omega(-b) = \alpha_{t1}T_{11}$ ;  $\omega(+b) = \alpha_{t3}T_{13}$ . Тогда напряженно-деформированное состояние характеризуется отличным от нуля усилием  $N_{2j}$ , изгибающими моментами  $M_{1j}$ ,  $M_{2j}$  и компонентами деформации  $\varepsilon_{1j}$ ,  $\varepsilon_{2j}$ ,  $\varkappa_{1j}$  срединной поверхности оболочки [2], которые могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} N_{2j} &= D_{0j}(\omega_{0j} - \alpha_{tj}T_{1j}); \\ M_{1j} &= -\frac{D_{1j}}{h} \left[ \frac{a_{10}^2 h}{R} \frac{\partial^2 \omega_{0j}}{\partial x^2} + \alpha_{tj}(1 + \nu) T_{2j} \right]; \\ M_{2j} &= -\frac{D_{1j}}{h} \left[ \frac{\nu a_{10}^2 h}{R} \frac{\partial^2 \omega_{0j}}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{tj}(1 + \nu)}{1} T_{2j} \right]; \\ \varepsilon_{1j} &= -\nu \omega_{0j} + \alpha_{tj}(1 + \nu) T_{1j}; \quad \varepsilon_{2j} = \omega_{0j}; \\ \varkappa_{1j} &= \frac{a_{10}^2}{R} \frac{\partial^2 \omega_{0j}}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\omega_{0j} = \frac{\omega_j}{R}$ ,  $\omega_j$  — функция прогибов;  $x = \frac{a_{10}z}{R}$ ;  $a_{10}^4 = \frac{3(1 - \nu^2)R^2}{4h^2}$ ;

$D_{0j} = 2E_j h$  — жесткость на растяжение;  $D_{1j} = \frac{2E_j h^3}{3(1 - \nu^2)}$  — изгибная жесткость;  $E_j$  — модуль упругости;  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 \equiv \nu$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha_{tj}$  — коэффициент линейного температурного расширения. При этом функция прогибов  $\omega_{0j}(x, \tau)$  и функция температуры  $T_{1j}$  связаны между собой дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial^4 \omega_{0j}}{\partial x^4} + 4(\omega_{0j} - \alpha_{tj}T_{1j}) = 0. \quad (5)$$

Меридиональные  $\sigma_{1j}$  и кольцевые  $\sigma_{2j}$  температурные напряжения на внешней ( $\sigma_{1j}^+$ ,  $\sigma_{2j}^+$ ) и внутренней ( $\sigma_{1j}^-$ ,  $\sigma_{2j}^-$ ) поверхностях оболочки выражаются через температуру и функцию прогибов следующими формулами:

$$\begin{aligned} \sigma_{1j}^\pm &= \mp \frac{E_j h a_{10}^2}{(1 - \nu^2) R} \left[ \frac{\partial^2 \omega_{0j}}{\partial x^2} + \frac{\alpha_{tj}(1 + \nu) R}{a_{10}^2 h} T_{2j} \right] + \\ &\quad + \frac{E_j \alpha_{tj}}{1 - \nu} (T_{1j} \pm T_{2j} - t^\pm); \\ \sigma_{2j}^\pm &= E_j \left[ \omega_{0j} - \alpha_{tj} T_{1j} \mp \frac{a_{10}^2 h}{(1 - \nu^2) R} \left( \nu \frac{\partial^2 \omega_{0j}}{\partial x^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\alpha_{tj}(1 + \nu) R}{a_{10}^2 h} T_{2j} \right) \right] + \frac{E_j \alpha_{tj}}{1 - \nu} (T_{1j} \pm T_{2j} - t^\pm), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $t^\pm(\tau)$  — температура внутренней поверхности оболочки.

Рассмотрим задачу об определении оптимального по напряжениям режима нагрева по толщине кусочно-однородной цилиндрической оболочки, внутренняя поверхность которой теплоизолирована, а на внешней температуре  $t^+(\tau)$  изменяется во времени и является функцией управления. При этом на температуру и напряжения на внешней поверхности оболочки накладываются ограничения следующего вида:

а) температура  $t^+(\tau)$  на внешней поверхности оболочки для  $0 \leq \tau \leq \tau_*$  ограничена значением  $T_0$ , а при  $\tau > \tau_*$  равна  $t_0^*$ , т. е.

$$\begin{aligned} t_0 \leq t^+(\tau) \leq T_0 \quad \text{для } 0 \leq \tau \leq \tau_*; \\ t^+(\tau) = t_0^* \quad \text{для } \tau \geq \tau_*, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\tau_*$  — продолжительность режима нагрева;

б) температурные напряжения  $\sigma$  на внешней ( $\sigma^+$ ) поверхности изменяются в заданных пределах:

$$\sigma_{01j}^+ \leq \sigma_{1j}^+ \leq \sigma_{*1j}^+; \quad \sigma_{02j}^+ \leq \sigma_{2j}^+ \leq \sigma_{*2j}^+. \quad (8)$$

Сформулированная задача решается с использованием численного метода локальных вариаций [3]. В качестве критерия оптимальности принимается минимум функционала энергии упругой деформации оболочки, который в рассматриваемом случае записывается в виде

$$\begin{aligned} M^* = & \frac{\pi D_{01} R^2}{(1-\nu^2) a_{10}} \int_0^{\tau_*} \left\{ \int_{-b}^c \left[ (1-\nu^2) (\alpha_{11} T_{11} - \omega_{01})^2 + \right. \right. \\ & + \frac{h^2}{3} \left( \frac{a_{10}^2}{R} \frac{\partial^2 \omega_{01}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{2\alpha_{11}(1+\nu)}{3} T_{21} \left( \frac{ha_{10}^2}{R} \frac{\partial^2 \omega_{01}}{\partial x^2} + \alpha_{11} T_{21} \right) + \\ & \left. \left. + \frac{2\alpha_{11}^2(1+\nu)}{45} a_1^4 h^4 \left[ \left( \frac{dT_{11}}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{35} \left( \frac{dT_{21}}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} dx + \\ & + \frac{E_2}{E_1} \int_{-c}^c \left\{ (1-\nu^2) (\alpha_{12} T_{12} - \omega_{02})^2 + \frac{h^2}{3} \left( \frac{a_{10}^2}{R} \frac{\partial^2 \omega_{02}}{\partial x^2} \right)^2 + \right. \\ & + \frac{2\alpha_{12}(1+\nu)}{3} T_{22} \left( \frac{ha_{10}^2}{R} \frac{\partial^2 \omega_{02}}{\partial x^2} + \alpha_{12} T_{22} \right) + \frac{2(1+\nu)\alpha_{12}^2 a_2^4 h^4}{45} \times \\ & \times \left[ \left( \frac{dT_{12}}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{35} \left( \frac{dT_{22}}{d\tau} \right)^2 \right] \left. \right\} dx + \frac{E_3}{E_1} \int_c^b \left\{ (1-\nu^2) (\alpha_{13} T_{13} - \omega_{03})^2 + \right. \\ & + \frac{h^2}{3} \left( \frac{a_{10}^2}{R} \frac{\partial^2 \omega_{03}}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{2\alpha_{13}(1+\nu)}{3} T_{23} \left( \frac{ha_{10}^2}{R} \frac{\partial^2 \omega_{03}}{\partial x^2} + \alpha_{13} T_{23} \right) + \\ & \left. \left. + \frac{2(1+\nu)\alpha_{13}^2 a_3^4 h^4}{45} \left[ \left( \frac{dT_{13}}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{35} \left( \frac{dT_{23}}{d\tau} \right)^2 \right] \right\} dx \right\} d\tau. \quad (9) \end{aligned}$$

В применяемом методе предполагается, что нулевое приближение решения задачи известно. В нулевом приближении искомый температурный режим  $t_{(0)}^+(\tau)$  выбираем так, чтобы выполнялись условия (7) и ограничения (8). Для нахождения первого приближения  $t_{(1)}^+(\tau)$  весь интервал  $0 \leq \tau \leq \tau_*$  разбивается точками  $\tau_i = i_* \frac{\tau_*}{N}$  ( $i = \overline{1, N-1}$ ) на  $N$  равных частей. В каждый момент времени  $\tau_i$  для трех значений температуры  $t_{(0)}^+(\tau_i) - \delta$ ;  $t_{(0)}^+(\tau_i)$ ;  $t_{(0)}^+(\tau_i) + \delta$  вычисляем значение функционала (9). Шаг  $\delta$  варьирования температуры задается так, чтобы температура  $t_{(0)}^+(\tau_i) \pm \delta$  удовлетворяла условиям (7) и ограничениям (8). В качестве температуры  $t_{(1)}^+(\tau_i)$  выбираем ту из трех перечисленных, для которой значение функционала (9) минимально.

Построение последующих приближений проводится по описанному алгоритму и сопровождается дроблением шага варьирования температуры. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия

$$|t_{(n+1)}^+(\tau_i) - t_{(n)}^+(\tau_i)| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — заданная малая величина.

Численный анализ выполнен для оболочки радиуса  $R = 25$  см и толщины  $2h = 1,4$  см, изготовленной из материалов со следующими характеристиками:

$$E_1 = 6670 \cdot 10^2, \quad E_2 = 7708 \cdot 10^2, \quad E_3 = 6450 \cdot 10^2 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2};$$

$$\alpha_{11} = 0,770 \cdot 10^{-5}, \quad \alpha_{12} = 0,805 \cdot 10^{-5}, \quad \alpha_{13} = 0,920 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{град}};$$

$$\lambda_1 = 0,003894, \quad \lambda_2 = 0,001541, \quad \lambda_3 = 0,001757 \frac{\text{кал}}{\text{см} \cdot \text{с} \cdot \text{град}};$$

$$c_1 = 0,189999, \quad c_2 = 0,080883, \quad c_3 = 0,175922 \frac{\text{кал}}{\text{г} \cdot \text{град}};$$

$$\rho_1 = 2,56, \quad \rho_2 = 4,08, \quad \rho_3 = 2,80 \frac{\text{г}}{\text{см}^3};$$

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu = 0,215.$$

На рис. 2 представлены графики изменения максимальных кольцевых и меридиональных напряжений на внешней и внутренней поверхностях оболочки вдоль осевой координаты  $x$ . Из приведенных графиков видно, что максимальными растягивающими напряжениями будут кольцевые на внешней поверхности оболочки в сечении с координатой  $x = 0,914$ .

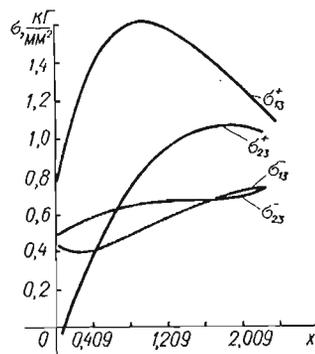


Рис. 2

На рис. 3 приведено оптимальное распределение во времени температуры и напряжений на внешней и внутренней поверхностях оболочки в сечении  $x = 0,914$ . Из этого рисунка видно, что в начальный момент при подъеме температуры до максимальной растягивающие температурные напряжения возникают на внутренней поверхности. На участке охлаждения растягивающие температурные напряжения возникают на внешней поверхности. При этом на внутренней поверхности расчетными являются кольцевые растягивающие напряжения, а на внешней — меридиональные.

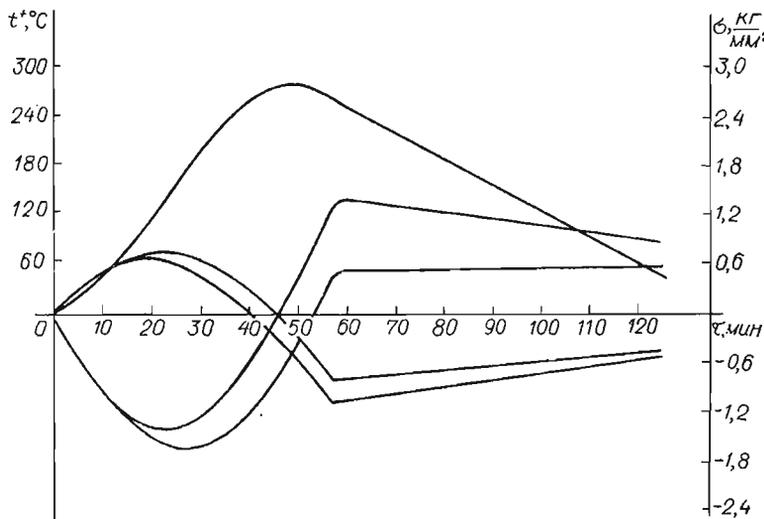


Рис. 3

1. Бурак Я. И., Будз С. Ф. Об определении оптимальных режимов нагрева тонкой сферической оболочки. — Прикл. механика, 1974, 10, № 2, с. 14—20.
2. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. — К.: Вид-во АН УРСР, 1961. — 212 с.
3. Черноусько Ф. М., Баничук А. В. Вариационные задачи механики и управления. — М.: Наука, 1973. — 225 с.