УДК 539.377

С. Ф. Будз, Е. М. Ирза

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ НАГРЕВА СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Рассмотрим тонкостенную теплоизолированную на внутренней поверхности замкнутую сферическую оболочку радиуса R и постоянной толщины $2h$, на внешней поверхности которой заданы переменные во времени граничные условия. Температура оболочки отсчитывается от начальной, равна температуре внешней среды и равна нулю, т. е.

$$(t(\gamma,\ u)-t^{+}(u))\,S_{+}(u_1-u)+\left(h\,\frac{\partial t(\gamma,\ u)}{\partial\gamma}+\mathrm{Bi}\,t(\gamma,\ u)\,(S_{+}(u_2-u)-\right.$$
$$\left.-S_{+}(u_1-u)\right)+(t(\gamma,\ u)-t^{+}(u))(S_{+}(u_3-u)-S_{+}(u_2-u))=0 \text{ при } \gamma=h; \tag{1}$$

$$\frac{\partial t(\gamma,\ u)}{\partial\gamma}=0 \text{ при } \gamma=-h;\quad t(\gamma,\ u)=t_c=0 \text{ при } u=0.$$

Здесь γ — координата по толщине оболочки, отсчитываемая от срединной поверхности; $u=\tau/a^2h^2$; a^{-2} — коэффициент температуропроводности; τ — время; $t(\gamma,\ u)$ — температура оболочки; $t^{+}(u)$ — температура на внешней поверхности оболочки, которая изменяется во времени по определенному закону; Bi — коэффициент Био; S_{+} — функция скачка; $0<u_1<u_2<u_3$; u_3 — продолжительность процесса нагрева сферической оболочки.

Примем, что температура по толщине оболочки изменяется по кубическому закону [2], который запишем в виде

$$t(\gamma,\ u)=\frac{\gamma}{2h}\left(\frac{\gamma^2}{3h^2}-\frac{1}{5}\right)\frac{dT_*}{du}+\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma^2}{h^2}-\frac{1}{3}\right)\frac{dT}{du}+\frac{\gamma}{h}T_*+T, \tag{2}$$

где $T=\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h}t d\gamma$, $T_*=\frac{3}{2h^2}\int\limits_{-h}^{h}\gamma t d\gamma$ — усредненная температура и температурный момент, удовлетворяющие системе уравнений теплопроводности, полученной на основании соотношений (1):

$$\left[\frac{1}{15}\frac{dT_*}{du}+\frac{1}{3}\frac{dT}{du}+T_*+T-t^{+}(u)\right]S_{+}(u_1-u)+\left[\frac{2}{5}\left(1+\frac{\mathrm{Bi}}{6}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{dT_*}{du}+\left(1+\frac{\mathrm{Bi}}{3}\right)\frac{dT}{du}+(1+\mathrm{Bi})\,T_*+\mathrm{Bi}\,T\right](S_{+}(u_2-u)-S_{+}(u_1-u))+$$
$$+\left[\frac{1}{15}\frac{dT_*}{du}+\frac{1}{3}\frac{dT}{du}+T_*+T-t^{+}(u)\right](S_{+}(u_3-u)-S_{+}(u_2-u))=$$
$$=0; \tag{1'}$$

$$\frac{2}{5}\frac{dT_*}{du}-\frac{dT}{du}+T_*=0.$$

Учитывая нулевые начальные условия для температуры оболочки, на основании закона (2) приходим к начальным условиям для T и T_*:

$$T(0)=0;\quad \frac{dT(0)}{du}=0;\quad T_*(0)=0. \tag{3}$$

При отсутствии внешнего силового нагружения напряженное состояние оболочки характеризуется меридиональным σ_s и кольцевым σ_β напряжениями, которые определяются по формулам [1]

$$\sigma_s=\sigma_\beta\equiv\sigma=\frac{\alpha_t E}{1-\nu}(T-t), \tag{4}$$

где α_t — коэффициент линейного температурного расширения; E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона.

Рассмотрим задачу об определении оптимального по напряжениям режима нагрева по толщине замкнутой сферической оболочки, внутренняя поверхность которой теплоизолирована, а на внешней заданы переменные во времени граничные условия. Функцией управления является температура внешней поверхности оболочки. При этом на температуру t^+ и температурные напряжения оболочки накладываются следующие ограничения:

а) функция $t^+(u)$ для $0 \leqslant u \leqslant u_3$ неотрицательна и ограничена значением t_0, а при $u = u_3$ равна температуре t_3 ($t_3 < t_0$), т. е

$$\begin{aligned} 0 \leqslant t^+(u) \leqslant t_0 \text{ для } 0 \leqslant u \leqslant u_3; \\ t^+(u) = t_3 \text{ для } u \geqslant u_3; \end{aligned} \tag{5}$$

б) температура $t^+(u)$ подчинена системе функциональных условий вида

$$\int_0^{u_3} u^i t^+(u)\,du = A_i \qquad (i = \overline{0,\ n}), \tag{6}$$

где A_i — некоторые постоянные, которые будут использованы в дальнейшем для удовлетворения ограничений на изменение функций $t^+(u)$ в фиксированные моменты времени;

в) температурные напряжения $\sigma(\gamma, u)$ на внешней $\sigma^+ = \sigma(h, u)$ и внутренней $\sigma^- = \sigma(-h, u)$ поверхностях изменяются в заданных пределах:

$$\sigma_1^\pm \leqslant \sigma^\pm \leqslant \sigma_2^\pm; \quad \sigma_1^\pm \leqslant 0; \quad \sigma_2^\pm \geqslant 0. \tag{7}$$

Решение задачи ищем методами вариационного исчисления. В качестве условия оптимальности примем условие минимума функционала энергии упругой деформации оболочки, которое в нашем случае записывается так:

$$M = \frac{8\pi h R^2 \alpha_t^2 E}{3(1-\nu)} \int_0^{u_3} \left[\frac{1}{525} \left(\frac{dT_*}{du} \right)^2 + \frac{1}{15} \left(\frac{dT}{du} \right)^2 + T_*^2 \right] du. \tag{8}$$

Таким образом, функционал M рассматривается как функционал, заданный на множестве функций T, T_*, которые связаны с функцией управления $t^+(u)$ уравнениями (1′).

Функции $t^+(u)$ и $\sigma^\pm$ с учетом ограничений (5), (7) на основании работы [1] представим в виде

$$\begin{aligned} t^+(u) &= \frac{t_0}{2}(\sin\varphi_1(u) + 1); \\ \sigma^+ &= \frac{\sigma_2^+ - \sigma_1^+}{2}\left(\sin\varphi_2(u) + \frac{\sigma_2^+ + \sigma_1^+}{\sigma_2^+ - \sigma_1^+}\right); \\ \sigma^- &= \frac{\sigma_2^- - \sigma_1^-}{2}\left(\sin\varphi_3(u) + \frac{\sigma_2^- + \sigma_1^-}{\sigma_2^- - \sigma_1^-}\right), \end{aligned} \tag{9}$$

где $\varphi_i(u)$ — некоторые функции.

Решение задачи о минимизации функционала M с учетом уравнений (1′), соотношения (2) и рассмотренных выше ограничений на функции t^+, $\sigma^\pm$ эквивалентно решению задачи о нахождении экстремалей функционала u_3

$$M^* = \frac{8\pi h R^2 \alpha_t^2 E}{3(1-\nu)} \int_0^{u_3} \left\{ \frac{1}{525} \left(\frac{dT_*}{du} \right)^2 + \frac{1}{15} \left(\frac{dT}{du} \right)^2 + T_*^2 + \right.$$

$$+ \lambda_1(u) \left[\left(\frac{1}{15} \frac{dT_*}{du} + \frac{1}{3} \frac{dT}{du} + T_* + T - \frac{t_0}{2} (\sin\varphi_1(u) + 1) \right) S_+(u_1 - u) + \right.$$

$$+\left(\frac{2}{5}\left(1+\frac{\mathrm{Bi}}{6}\right)\frac{dT_*}{du}+\left(1+\frac{\mathrm{Bi}}{3}\right)\frac{dT}{du}+(1+\mathrm{Bi})T_*+\mathrm{Bi}\,T-\mathrm{Bi}t_c\right)\times$$
$$\times\left(S_+(u_2-u)-S_+(u_1-u)\right)+\left(\frac{1}{15}\frac{dT_*}{du}+\frac{1}{3}\frac{dT}{du}+T_*+T-\right.$$
$$\left.-\frac{t_0}{2}(\sin\varphi_1(u)+1)\left(S_+(u_3-u)-S_+(u_2-u)\right)\right]+\lambda_2(u)\left[\frac{1}{15}\frac{dT_*}{du}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\frac{dT}{du}+T_*+\frac{1-\nu}{2\alpha_t E}(\sigma_2^+-\sigma_1^+)\left(\sin\varphi_2(u)+\frac{\sigma_2^++\sigma_1^+}{\sigma_2^+-\sigma_1^+}\right)\right]+$$
$$+\lambda_3(u)\left[-\frac{1}{15}\frac{dT_*}{du}+\frac{1}{3}\frac{dT}{du}-T_*+\frac{1-\nu}{2\alpha_t E}(\sigma_2^--\sigma_1^-)\left(\sin\varphi_3(u)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\sigma_2^-+\sigma_1^-}{\sigma_2^--\sigma_1^-}\right)\right]+\lambda_4(u)\left[-\frac{2}{5}\frac{dT_*}{du}+\frac{dT}{du}-T_*\right]+$$
$$\left.+\frac{t_0}{2}\sum_{i=0}^{n}\lambda_{i0}u^i(\sin\varphi_1(u)+1)\right\}du. \tag{10}$$

Здесь $\lambda_i(u)$, λ_{i0} — множители Лагранжа.

Из необходимого условия экстремума функционала (10) получаем следующую систему уравнений Эйлера:

$$\left[\lambda_1-\frac{1}{3}\frac{d}{du}\left(\frac{2}{5}\frac{dT}{du}+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3\lambda_4\right)\right]S_+(u_1-u)+$$
$$+\left[\mathrm{Bi}\,\lambda_1-\frac{1}{3}\frac{d}{du}\left(\frac{2}{5}\frac{dT}{du}+(3+\mathrm{Bi})\,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3\lambda_4\right)\right](S_+(u_2-u)-$$
$$-S_+(u_1-u))+\left[\lambda_1-\frac{1}{3}\frac{d}{du}\left(\frac{2}{5}\frac{dT}{du}+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+3\lambda_4\right)\right](S_+(u_3-u)-S_+$$
$$(u_2-u))=0;\ \left[2T_*+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4-\frac{1}{15}\frac{d}{du}\left(\frac{2}{35}\frac{dT_*}{du}+\lambda_1+\lambda_2-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\lambda_3-6\lambda_4\right)\right]\times S_+(u_1-u)+\left[2T_*+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4-\frac{1}{15}\frac{d}{du}\left(\frac{2}{35}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\frac{dT_*}{du}+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-6\lambda_4\right)\right](S_+(u_3-u)-S_+(u_2-u))=0; \tag{11}$$
$$-\frac{t_0}{2}\left(\lambda_1-\sum_{i=0}^{n}\lambda_{i0}u^i\right)=0;\quad \lambda_2\cos\varphi_2(u)=0;\quad \lambda_3\cos\varphi_3(u)=0.$$

Система уравнений (11) вместе с (1′), (4) и условиями (7) составляет полную систему уравнений для определения оптимальных режимов нагрева и соответствующих им температурных напряжений.

Пример. Пусть температура $t^+(u)$ на внешней поверхности оболочки равна нулю в начальный момент времени $u=0$. При $u=u_m$, где $0<u_m<u_1$, функция $t^+(u)$ достигает максимального значения t_0 и выдерживается при этой температуре до момента $u=u_1$, т. е.

$$t^+(u)=t_0 \text{ для } u_m\leqslant u\leqslant u_1;\quad \frac{dt^+(u_m)}{du}=0. \tag{12}$$

На промежутке времени $u_1\leqslant u\leqslant u_2$ имеет место конвективный теплообмен по закону Ньютона, а на промежутке $u_2\leqslant u\leqslant u_3$ функцией управления является температура внешней поверхности оболочки t^+. В момент времени $u=u_3$ $t^+=t_3$. При этом предполагается, что на промежутке времени $0\leqslant u\leqslant u_1$ растягивающие температурные напряжения на внешней поверхности оболочки меньше допустимых. В этом случае из анализа системы уравнений Эйлера (11) при $n=1$ следует, что $\cos\varphi_1(u)\neq 0$; $\cos\varphi_2(u)\neq 0$;

$\cos\varphi_3(u) \neq 0$; $\lambda_2 = 0$; $\lambda_3 = 0$; $\lambda_1 = \lambda_{10} + \lambda_{20}u$. Тогда решение системы уравнений (11) с учетом условий (2) имеет вид

$$T_* = C_1 e^{k(u-u_1)} + C_2 e^{-ku} + C_3 + C_4 u + C_5 u^2;$$

$$T = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{k}\right) C_1 e^{k(u-u_1)} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{k}\right) C_2 e^{-ku} + C_3 u +$$

$$+ \left(\frac{2}{5} + \frac{u}{2}\right) C_4 u + \left(\frac{2}{5} + \frac{u}{3}\right) C_5 u^2 + C_6, \tag{13}$$

где $k = \sqrt{\frac{2800}{33}}$. Произвольные постоянные C_i $(i = \overline{1, 6})$ определяются из условий (12) и нулевых начальных условий для температуры (1).

На промежутке времени $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ функции T и T_* определяются из следующих уравнений:

$$\frac{2}{5}\left(1 + \frac{\mathrm{Bi}}{6}\right)\frac{dT_*}{du} + \left(1 + \frac{\mathrm{Bi}}{3}\right)\frac{dT}{du} + (1 + \mathrm{Bi})\,T_* + \mathrm{Bi}\,T - \mathrm{Bi}\,t_c = 0; \tag{14}$$

$$-\frac{2}{5}\frac{dT_*}{du} + \frac{dT}{du} - T_* = 0,$$

решение которых запишем так:

$$T_* = C_1 e^{k_1 u} + C_2 e^{k_2 u};$$

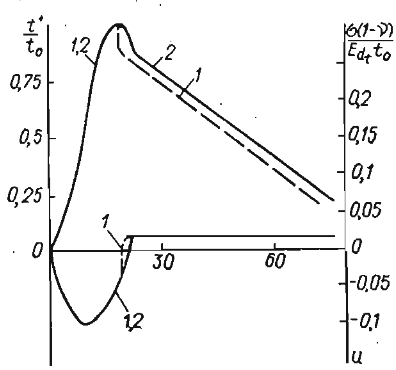
$$T = t_c - \left[\frac{2}{\mathrm{Bi}} + \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\left(\frac{2}{\mathrm{Bi}} + \frac{1}{2}\right) k_1\right] C_1 e^{k_1 u} -$$

$$- \left[\frac{2}{\mathrm{Bi}} + \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\left(\frac{2}{\mathrm{Bi}} + \frac{1}{2}\right) k_2\right] C_2 e^{k_2 u}, \tag{15}$$

где

$$k_{1,2} = \frac{-\left(2 + \frac{26}{15}\mathrm{Bi}\right) \pm \sqrt{\left(2 + \frac{26}{15}\mathrm{Bi}\right)^2 - \frac{8}{5}\mathrm{Bi}\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{2}\right)}}{\frac{4}{5}\left(2 + \frac{\mathrm{Bi}}{2}\right)}.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 определяются из условия сопряжения температуры $t(\gamma, u)$ в момент времени $u = u_1$.



Если в момент времени $u = u_2$ растягивающие температурные напряжения σ^+ достигают значения, равного σ_2^+, а для $u > u_2$ $\sigma^+ > \sigma_2^+$, то из анализа уравнений Эйлера (11) следует, что для обеспечения условий (7) согласно (9) необходимо перейти на режим нагрева, при котором растягивающие температурные напряжения σ^+ на внешней поверхности оболочки равны допустимым σ_2^+, т. е. $\sigma^+ = \sigma_2^+$. В рассматриваемом случае оптимальные режимы нагрева начиная с момента времени $u = u_2$ определяются из системы уравнений

$$\frac{1}{15}\frac{dT_*}{du} + \frac{1}{3}\frac{dT}{du} + T_* = -\frac{1-\nu}{\alpha_t E}\sigma_2^+; \quad \frac{2}{5}\frac{dT_*}{du} - \frac{dT}{du} + T_* = 0. \tag{16}$$

На рисунке кривыми *1* показано оптимальное распределение температуры t^+ и соответствующих температурных напряжений на внешней поверхности оболочки. Для сравнения кривыми *2* показан оптимальный режим нагрева и соответствующие ему температурные напряжения в случае, когда температура t^+ на всем промежутке времени нагрева $0 \leqslant u \leqslant u_3$ является функцией управления.

1. *Бурак Я. И., Будз С. Ф.* Об определении оптимальных режимов нагрева тонкой сферической оболочки.— Прикл. механика, 1974, 10, № 2, с. 14—20.
2. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках.— К.: Вид-во АН УРСР, 1961.— 212 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 19.04. 78

УДК 539.377

С. Ф. Будз, Н. Г. Гачкевич

ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ НАГРЕВА КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Определим оптимальные по напряжениям режимы нагрева кусочно-однородной теплоизолированной на внутренней поверхности цилиндрической оболочки радиуса R и постоянной толщины $2h$. В качестве функции управления принимаем переменную во времени температуру внешней поверхности оболочки $t^+(\tau)$. В дальнейшем будем пренебрегать возмущениями температурного поля в окрестности сечений сопряжения, т. е. принимать, что температурное поле зависит только от координаты γ $(-h \leqslant \gamma \leqslant h)$ и времени τ.

Примем, что температура по толщине оболочки изменяется по кубическому закону [1], который записывается в виде

$$t_j(\gamma, \tau) = \frac{a_j^2h^2}{2}\left(\frac{\gamma^2}{h^2} - \frac{1}{3}\right)\frac{dT_{1j}}{d\tau} + \frac{a_j^2h\gamma}{2}\left(\frac{\gamma^2}{3h^2} - \frac{1}{5}\right) \times$$
$$\times \frac{dT_{2j}}{d\tau} + T_{1j} + \frac{\gamma}{h}T_{2j}. \qquad (1)$$

Здесь индексы $j = 1, 2, 3$ введены для обозначения величин, относящихся к областям однородности $-b \leqslant z \leqslant -c$ — 1; $-c \leqslant z \leqslant c$ — 2 и $c \leqslant z \leqslant b$ — 3 (рис. 1), где z — осевая координата; $a_j^{-2} = \frac{\lambda_j}{c_j\rho_j}$ — коэффициент температуропроводности; λ_j — коэффициент теплопроводности; c_j — удельная теплоемкость; ρ_j — плотность материала; τ — время;

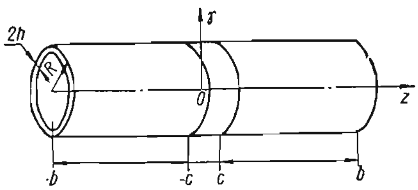


Рис. 1

$$T_{1j} = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t_j(\tau, \gamma)\, d\gamma;$$

$$T_{2j} = \frac{3}{2h^2}\int_{-h}^{h} \gamma t_j(\tau, \gamma)\, d\gamma$$

— усредненная температура и температурный момент, которые должны удовлетворять системе уравнений теплопроводности

$$\begin{aligned} &\frac{a_j^2h^2}{5}\frac{dT_{2j}}{d\tau} + \frac{4}{3}T_{2j} + T_{1j} = t^+(\tau);\\ &a_j^2h^2\frac{dT_{2j}}{d\tau} - \frac{5}{2}a_j^2h^2\frac{dT_{1j}}{d\tau} + \frac{5}{2}T_{2j} = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Пусть температура оболочки в начальный момент времени постоянна и равна t_0. Тогда на основании закона (1) для T_{1j}, T_{2j} получаем начальные условия

$$T_{1j}(0) = t_0; \quad \dot{T}_{1j}(0) = 0; \quad T_{2j}(0) = 0; \quad \dot{T}_{2j}(0) = 0. \qquad (3)$$

При этом согласно системе (2) $t^+(0) = t_0$. Точка над буквой обозначает производную по τ.