8. *Мхитарян А. М., Ушаков В. В.* Распространение аэрозольной струи в газовом и аэрозольном потоках.— В кн.: IV Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике : Аннот. докл. Киев, 1976, с. 68.
9. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Вариационная форма уравнений теории термодиффузионных процессов в деформируемом твердом теле.— Прикл. математика и механика, 1969, 33, № 4, с. 774—776.
10. *Рубашов И. Б., Бортников Ю. С.* Электрогазодинамика.— М.: Атомиздат, 1971.— 168 с.
11. *Салтанов Н. В.* Некоторые модели электромагнитной гидродинамики.— Прикл. математика, 1971, вып. 3, с. 125—150.
12. *Салтанов Н. В.* Обобщение вариационной модели гидродинамики в эйлеровом представлении.— В кн.: Современные проблемы гидромеханики и гидротехники. Киев : Наук. думка, 1977, с. 39—47.
13. *Салтанов Н. В.* Обобщение вариационного принципа гидродинамики в представлении Эйлера — Лагранжа.— В кн.: Аналитические и численные методы теории переноса. Минск, 1977, с. 107—114.
14. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1976.— Т. 1. 536 с.
15. *Ткалич В. С.* Квантовая динамика.— К: Наук. думка, 1974.— 180 с.
16. *Ткалич В. С.* Теория оптимального управления.— К.: Изд-во Киев. политехн. ин-та, 1976.— 119 с.
17. *Швец Р. Н., Дасюк Я. И.* Некоторые общие теоремы для смешанных динамических задач термодиффузии деформируемых твердых тел.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 55—61.

Институт гидромеханики
АН УССР

Поступила в редколлегию
05.09.78

УДК 539.3

Ю. З. Повстенко

О ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ УСИЛИЙ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ ОТ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ

На границе твердого тела вследствие окисления, нанесения специального покрытия или в связи с перегруппировкой атомов возникает тонкий приповерхностный слой. Его механическое состояние описывается с помощью тензора поверхностных усилий, тогда как в случае жидкой поверхности было достаточно одной скалярной величины — поверхностного натяжения.

Поверхностные усилия $N_{\alpha\beta}$ (α, $\beta = 1, 2$) связаны с плотностью поверхностной энергии γ формулой Херринга [6]

$$N_{\alpha\beta} = \gamma\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial\gamma}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}. \qquad (1)$$

Компоненты тензора деформации приповерхностного слоя выражаются через компоненты вектора перемещений $\vec{u}_0$ по известным формулам [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}v_0 + \frac{w_0}{R_1}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_0 + \frac{w_0}{R_2}; \qquad (2) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{v_0}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{u_0}{A_1}\right). \end{aligned}$$

Здесь α_1, α_2 — ортогональные криволинейные координаты на поверхности; A_1, A_2 — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны.

В линейном приближении

$$N_{\alpha\beta} = \gamma_0\delta_{\alpha\beta} + N^*_{\alpha\beta}. \qquad (3)$$

Постоянная γ_0 представляет собой ту часть поверхностной энергии, которая не зависит от деформации; $N^*_{\alpha\beta}$ — дополнительные поверхностные усилия, связанные с компонентами $\varepsilon_{\alpha\beta}$ линейными соотношениями

$$N_{11}^{*} = \frac{2E_0h}{1-\nu_0^2}(\varepsilon_{11}+\nu_0\varepsilon_{22}); \quad N_{22}^{*} = \frac{2E_0h}{1-\nu_0^2}(\varepsilon_{22}+\nu_0\varepsilon_{11}); \quad N_{12}^{*} = \frac{E_0h}{1+\nu_0}\varepsilon_{12}, \tag{4}$$

где E_0 и ν_0 — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала приповерхностного слоя; $2h$ — его толщина.

Полные поверхностные усилия $N_{\alpha\beta}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$\begin{gathered}\frac{\partial(A_2N_{11})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1N_{12})}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}N_{12} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}N_{22} = A_1A_2(\sigma_{1n}-q_1);\\ \frac{\partial(A_1N_{22})}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial(A_2N_{12})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}N_{12} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}N_{11} = A_1A_2(\sigma_{2n}-q_2);\\ \frac{N_{11}}{R_1} + \frac{N_{22}}{R_2} = -\sigma_{nn}+q_n,\end{gathered} \tag{5}$$

где $\vec{q}$ — вектор внешней нагрузки, приложенной к поверхности; $\{\sigma_{1n}, \sigma_{2n}, \sigma_{nn}\}$ — компоненты напряжений, действующих на приповерхностный слой со стороны основного материала. Последние являются граничными значениями при подходе к поверхности компонент тензора напряжений σ_{ij}, определяющихся из системы уравнений

$$\begin{gathered}G\nabla^2\vec{u} + (\lambda+G)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} = 0;\\ e_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i); \quad \sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2Ge_{ij}.\end{gathered} \tag{6}$$

Здесь λ, G — коэффициенты Ламе.

При отсутствии внешней нагрузки и при величине γ_0, не зависящей от координат на поверхности, подстановка соотношений (3) в уравнения (5) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{gathered}\frac{\partial(A_2N_{11}^{*})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1N_{12}^{*})}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}N_{12}^{*} - \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}N_{22}^{*} = A_1A_2\sigma_{1n};\\ \frac{\partial(A_1N_{22}^{*})}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial(A_2N_{12}^{*})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}N_{12}^{*} - \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}N_{11}^{*} = A_1A_2\sigma_{2n};\\ \frac{N_{11}^{*}}{R_1} + \frac{N_{22}^{*}}{R_2} + \sigma_{nn} = -\gamma_0\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).\end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, уравнения (2), (4), (6) и (7) вместе с условием равенства перемещений на поверхности

$$\vec{u} = \vec{u}_0 \tag{8}$$

образуют полную систему, из которой определяются усилия $N_{\alpha\beta}^{*}$.

В простейшем случае сферической поверхности раздела радиуса R из системы (6) получаем

$$w = \frac{1-2\nu}{E}R\sigma_{nn} \tag{9}$$

(E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона основного материала), а уравнения (2), (4), (7) дают

$$\sigma_{nn} = -\frac{2}{R}(\gamma_0 + N_{11}^{*}); \quad w_0 = \frac{1-\nu_0}{2hE_0}RN_{11}^{*}. \tag{10}$$

Из условия (8) при малых $\frac{2h}{R}$ следует, что

$$N_{11}^{*} = -\frac{4h}{R}\frac{E_0}{E}\frac{1-2\nu}{1-\nu_0}\gamma_0. \tag{11}$$

Тогда полное усилие будет таким:

$$N_{11} = \gamma_0 + N_{11}^{*} = \gamma_0 \left(1 - \frac{4h}{R}\,\frac{E_0}{E}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu_0}\right). \tag{12}$$

Аналогичные выкладки для тела со сферической полостью приводят к формуле

$$N_{11} = \gamma_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\,\frac{E_0}{E}\,\frac{1+\nu}{1-\nu_0}\right). \tag{13}$$

Соотношения (12), (13) отражают зависимость полных поверхностных усилий от радиуса кривизны поверхности раздела. Необходимость получения зависимостей такого рода отмечалась, например, в работе [8].

Если упругие постоянные основного материала и тонкого приповерхностного слоя отличаются незначительно ($E_0 \approx E$; $\nu_0 \approx \nu$), то формулы (12) и (13) приводятся к виду

$$\begin{aligned} N_{11} &= \gamma_0 \left(1 - \frac{4h}{R}\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right); \\ N_{11} &= \gamma_0 \left(1 - \frac{2h}{R}\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

В этом случае вместо решения контактной задачи для неоднородной системы твердое тело — поверхностный слой можно рассматривать уравнение механического равновесия, включив в него массовые силы, распределенные по поверхности

$$G\nabla^2\vec{u} + (\lambda + G)\,\mathrm{grad\,div}\,\vec{u} = \gamma_0 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{\delta(\xi_3 - a)}{h_3}\,\vec{i}_3, \tag{15}$$

где ξ_i — ортогональные криволинейные координаты, выбранные таким образом, что $\xi_3 = a$ — уравнение поверхности; h_i — коэффициенты Ламе; $\delta(\xi_3 - a)$ — дельта-функция.

В частности, для сферической границы раздела

$$\frac{d^2w}{dr^2} + \frac{2}{r}\,\frac{dw}{dr} - \frac{2w}{r^2} = \frac{2\gamma_0}{R}\,\frac{\delta(r-R)}{\lambda + 2G}. \tag{16}$$

Общее решение уравнения (16) можно получить, используя методы работы [1]:

$$w = K_1 r + \frac{K_2}{r_2} + \frac{1}{3}\,\frac{q}{\lambda + 2G}\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) S(r - R). \tag{17}$$

Здесь $S(r-R)$ — функция скачка; $p = \frac{2\gamma_0}{R}$; K_1 и K_2 — константы, определяющиеся из граничных условий

$$\begin{gathered} \sigma_{rr}\big|_{r=R+0} = 0; \\ \sigma_{rr}\big|_{r=R-0} = 0, \quad \sigma_{rr}\big|_{r=\infty} = 0 \end{gathered} \tag{18}$$

для сферы и тела со сферической полостью соответственно.

Проделав несложные выкладки, получим

$$\sigma_{rr} = -p\,[1 - S(r-R)]; \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -p\left[1 - \frac{\nu}{1-\nu} S(r-R)\right] \tag{19}$$

для сферы и

$$\begin{gathered} \sigma_{rr} = p\left(\frac{R}{r}\right)^3 S(r-R); \\ \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{p}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3 S(r-R) - \frac{p}{2}\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,[1 - S(r-R)] \end{gathered} \tag{20}$$

для тела со сферической полостью.

Дополнительные поверхностные усилия будут для сферы и тела со сферической полостью соответственно:

$$
\begin{aligned}
N^{*}_{11} &= 2h\sigma_{\theta\theta}\,|_{r=R+0} = -2hp\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\,; \\
N^{*}_{11} &= 2h\sigma_{\theta\theta}\,|_{r=R-0} = -ph\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\,,
\end{aligned}
\tag{21}
$$

и снова приходим к формулам (14) для полных усилий.

Из выражений (19), (20) следует, что при переходе через поверхность скачок нормальных напряжений $[\sigma_{rr}] = p$, а скачок $[\sigma_{\theta\theta}] = [\sigma_{\varphi\varphi}] = p\frac{\nu}{1-\nu}$. Анализ уравнения равновесия (15) и линейного закона Гука (третье уравнение системы (6)) показывает, что такие соотношения справедливы для произвольной достаточно гладкой формы поверхности твердого тела. Всюду кроме границы решение уравнения (16) при граничных условиях (18), т. е. выражения (19), (20), совпадает с решением [2] однородного уравнения равновесия при граничных условиях $\sigma_{rr}\,|_{r=R} = -p$ или $\sigma_{rr}\,|_{r=R} = p$ соответственно для сферы и тела со сферической полостью. Аналогичный результат справедлив для любой формы поверхности [7]. Таким образом, два сформулированные выше утверждения дают возможность использовать решения обычных краевых задач теории упругости для нахождения компонент тензора поверхностных усилий.

Проиллюстрируем сказанное на примере эллиптического отверстия в плоскости (при плоской деформации). В этом случае $p = \frac{\gamma_0}{R_1}$, а кривизна $\frac{1}{R_1}$ определяется по формуле [5]

$$\frac{1}{R_1} = \operatorname{Re}\frac{\sigma\,[\omega''(\sigma) + \omega'(\sigma)]}{|\,\omega'(\sigma)\,|^3}\,\overline{\omega'(\sigma)}, \tag{22}$$

где $z = \omega(\zeta)$ — функция, отображающая внешность заданного контура на внешность единичной окружности $|\,\rho\,| = 1$. Для эллипса с полуосями a, b

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a+b}{2}\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right); \quad m = \frac{a-b}{a+b} \tag{23}$$

и

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{a+b}\,\frac{1-m^2}{(1+m^2-2m\cos 2\theta)^{3/2}}. \tag{24}$$

Напряжения определяются функциями Мусхелишвили $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ [3]:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\rho\rho} + \sigma_{\theta\theta} = 4\operatorname{Re}\Phi(\zeta); \\
&\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\rho\rho} + 2i\sigma_{\rho\theta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2\overline{\omega'(\zeta)}}\,[\overline{\omega(\zeta)}\,\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\,\Psi(\zeta)].
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Последние находятся из граничного условия при $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \frac{1}{\sigma^2\omega'(\sigma)}\,[\omega(\sigma)\,\overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\omega'(\sigma)\,\Psi(\sigma)}] = \\
&= Cf(\sigma) = C\,\frac{1-m^2}{(1+m^2-2m\cos 2\theta)^{3/2}}, \quad C = \frac{2\gamma_0}{a+b},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

и выражаются через коэффициенты разложения функции $f(\sigma)$ в ряд Фурье $f(\sigma) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\sigma^n + \sigma^{-n})$ следующим образом:

$$\Phi(\zeta) = C\left(-\frac{ma_0}{\zeta^2 - m} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}\zeta^{-2n}\right);$$

$$\Psi(\zeta) = C\left[-\frac{a_0}{\zeta^2 - m} - \frac{ma_0(1 - m\zeta^2)}{(\zeta^2 - m)^2} - \frac{2ma_0(1 + m\zeta^2)\zeta^2}{(\zeta^2 - m)^3} + \right. \tag{27}$$

$$\left. + 2\zeta\frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m}\sum_{n=1}^{\infty} na_{2n}\zeta^{-2n-1}\right]$$

На контуре отверстия получаем

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2\gamma_0}{a + b}\left[\frac{1 - m^2}{(1 + m^2 - 2m\cos 2\theta)^{3/2}} - \frac{4(1 + m)}{\pi}E\left(\frac{2\sqrt{m}}{1 + m}\right)\frac{1}{1 + m^2 - 2m\cos 2\theta}\right] \tag{28}$$

(E — полный эллиптический интеграл первого рода). Интересующие нас полные усилия $N_{\theta\theta}$ в приповерхностном слое выражаются так:

$$N_{\theta\theta} = \gamma_0 + 2h\left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{\nu}{1 - \nu}p\right) =$$

$$= \gamma_0\left\{1 - \frac{4h}{a + b}\left[\frac{4(1 + m)E\left(\frac{2\sqrt{m}}{1 + m}\right)}{\pi(1 + m^2 - 2m\cos 2\theta)} - \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu}\frac{1 + m^2}{(1 + m^2 - 2m\cos 2\theta)^{3/2}}\right]\right\}. \tag{29}$$

В описанной модели величины $N^*_{\alpha\beta}$, отражающие зависимость полных поверхностных усилий от кривизны поверхности (вообще и от координат на поверхности), характеризуют различие между понятиями «поверхностная энергия» и «поверхностные усилия» и особенности поверхностных явлений на границе твердого тела по сравнению с поверхностными явлениями на границе жидкости. В отличие от последней в случае твердого тела тензор поверхностных усилий не является шаровым. В частности, в рассмотренном выше примере, когда твердое тело занимало внешность эллиптического цилиндра, в направлении, перпендикулярном к плоскости, будут действовать поверхностные усилия $N_{zz} = \gamma_0$, отличающиеся от усилий $N_{\theta\theta} = \gamma_0 + N^*_{\theta\theta}$.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1959.— 460 с.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц И. М.* Теория упругости.— М.: Наука, 1965.— 204 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.— 708 с.
4. *Огибалов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969.— 696 с.
5. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий.— Киев: Наук. думка, 1968.— 887 с.
6. *Herring C.* Surface tension as a motivation for sintering.— In: The physics of powder metallurgy. New York: McGraw — Hill, 1951, p. 143—179.
7. *Kecs W., Teodorescu P. P.* Aplicatii ale teoriei distributiilor in mecanica.— Bucuresti: Acad. RSR, 1970.— 438 p.
8. *Vermaak J. S., Mays C. W., Kuhlmann-Wilsdorf D.* On surface stress and surface tension.— Surf. Sci., 1968, N 12, p. 128—133.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
11.10.78

УДК 621.315 : 592.2

В. Ф. Чекурин

УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ТРЕХКОНТИНУУМНОЙ МОДЕЛИ СОБСТВЕННОГО ПОЛУПРОВОДНИКА

Полупроводник как термодинамическая система содержит три взаимодействующие подсистемы — электроны, дырки и кристаллическую решетку. Концентрация свободных носителей в полупроводниках мала по сравнению с металлами и может изменяться в связи с возможностью переходов