пределения напряжений σ_x и σ_y в зависимости от x, Fo и Bi при $y = 0$, $\varepsilon = 0{,}1$, $c = 10$ приведены на рис. 1.

Напряжения $\sigma_x|_{y=0}$ сжимающие и с ростом x уменьшаются. Напряжения $\sigma_y|_{y=0}$ изменяют знак, переходя из области сжатия в область растяжения. Максимального значения напряжения достигают при $x = 0$. Из графиков видно, что с ростом критериев Bi и Fo напряжения уменьшаются.

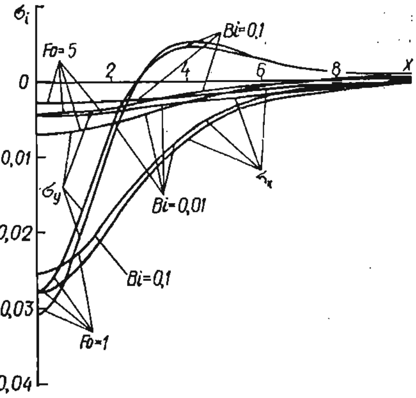

Рис. 1

Исследуем теперь влияние двустороннего покрытия на распределение температурных напряжений. Приводим графики изменения напряжений σ_x, σ_y (рис. 2), τ_{xy} (рис. 3), возникающих в однородной пластинке ($\varepsilon = 0$) и в пластинке с двусторонним покрытием ($\varepsilon = 0{,}1$; $0{,}25$), в зависимости от y при $x = 0$ (σ_x, σ_y) и $x = 2$ (τ_{xy}). При этом $\mathrm{Bi} = 0{,}01$,

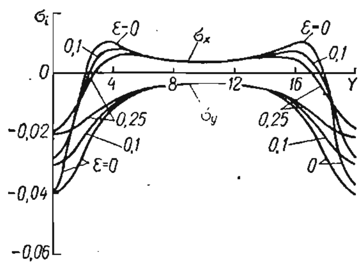

Рис. 2

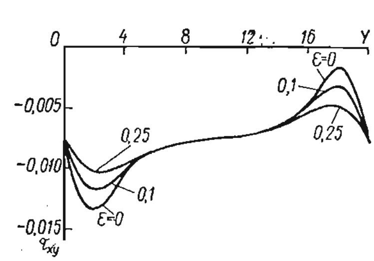

Рис. 3

$\mathrm{Fo} = 1$, $c = 10$. Как видно из графиков, максимальные значения напряжений в стальной пластинке с двусторонним покрытием при принятых значениях критериев Bi и Fo с увеличением толщины покрытия уменьшаются.

1. *Коляно Ю. М., Кулик О. М., Гульчевський Л. С.* Термопружність армованих пластинок.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 7, с. 608—612.
2. *Коляно Ю. М., Попович В. С.* Уравнения термоупругости неоднородных и кусочно-однородных пластин.— В кн.: Математические методы в термомеханике.— Киев: Наук. думка, 1978, с. 50—63.
3. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев: Наук. думка, 1972.— 308 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
13.09.78

УДК [535 : 538] : 519.33

Н. В. Салтанов

ВАРИАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКИ В ЭЙЛЕРОВОМ И ЭЙЛЕР-ЛАГРАНЖЕВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

Хорошо известно, что вариационные формулировки моделей и задач физики, механики, прикладной математики и т. д. обладают определенными преимуществами. В частности, в последнее время значительный прогресс в построении моделей механики сплошной среды достигнут в работах Л. И. Седова [15 и др.]. В термомеханике эффективные вариационные принципы сформулированы Я. С. Подстригачем, Э. И. Григолюком и их сотрудниками [1, 5, 9, 17]. В исследованиях В. С. Ткалича [15, 16] выполнена значительная работа по анализу и развитию системы вариационных принципов теоретической динамики.

В настоящей работе на основе принципа Гамильтона — Остроградского в эйлеровом и эйлер-лагранжевом представлениях строятся и изучаются математические модели электрогидродинамики — одной из интенсивно развивающихся областей механики сплошной среды [2—4, 6, 8, 10]. Структура этих моделей аналогична структуре моделей гидродинамики, рассмотренных в работах [12, 13].

Функционал в эйлеровом представлении. В произвольной ортогональной системе координат рассмотрим информационный функционал

$$S(t,\ x;\ E,\ \Phi,\ \rho,\ v,\ \varphi,\ X,\ \Pi;\ *) = \iiiint (L_0 + L_*)\, dx_1 dx_2 dx_3 dt; \tag{1}$$

$$L_0 \equiv \sqrt{g}\left[\rho\left(\frac{v_j^2}{2} - Q - \frac{d\varphi}{dt} - \Pi\frac{dX}{dt}\right) - \frac{\varepsilon_0 E_j^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 E_j}{h_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\right];$$

$$Q = Q(t,\ x,\ \Phi,\ v,\ \rho,\ \varphi,\ X,\ \Pi),\quad \frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{v_j}{h_j}\frac{\partial}{\partial x_j};\quad x \equiv \{x_i\}; \tag{2}$$

$$E \equiv \{E_i\};\ v \equiv \{v_i\};\ X \equiv \{X^\Gamma\};\ \Pi \equiv \{\Pi^\Gamma\};\quad i,\ j,\ \ldots = 1,\ 2,\ 3;$$

$$\Gamma = 1,\ \ldots,\ \Gamma^*.$$

Здесь E_i — напряженность электрического поля; Φ — электрический потенциал; ε_0 — электрическая постоянная вакуума; Q — обобщенная энергия единицы массы среды, являющаяся произвольно заданной функцией своих аргументов. Остальные обозначения аналогичны принятым в работе [12]. Отметим, что функционал работы [12] является частной специализацией функционала (1), (2) при $\Phi = 0$. При $\delta_\rho \neq 0$ функционал (1), (2) описывает течения сжимаемой среды, при $\rho = \text{const}$ — несжимаемой.

Условия стационарности. Выполняя варьирование функционала (1), (2) по функциям сравнения E_i, Φ, v_i, ρ, φ, Π и X и преобразуя затем условие стационарности по плотности с помощью условий стационарности по компонентам скорости, получаем такие соотношения:

$$E_i = -\frac{\partial\Phi}{h_i\partial x_i},\quad i = 1,\ 2,\ 3; \tag{3}$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\sqrt{g}E_k}{h_k} = \sqrt{g}\rho\varkappa; \tag{4}$$

$$v_i - \mathcal{W}_i = \frac{1}{h_i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + \Pi\frac{\partial X}{\partial x_i}\right),\quad i = 1,\ 2,\ 3; \tag{5}$$

$$\frac{v_j^2}{2} + Q - v_j\mathcal{W}_j + \frac{p}{\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Pi\frac{\partial X}{\partial t} = 0; \tag{6}$$

$$\frac{\partial\sqrt{g}\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\sqrt{g}\rho v_k}{h_k} = \sqrt{g}\rho R^m; \tag{7}$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial\Pi}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial\sqrt{g}\rho\Pi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\sqrt{g}\rho\Pi v_k}{h_k} = \sqrt{g}\rho\frac{\partial Q}{\partial X}; \tag{9}$$

$$\varkappa \equiv \frac{\partial Q}{\partial\Phi};\ \mathcal{W}_i \equiv \frac{\partial Q}{\partial v_i};\ p \equiv \rho^2\frac{\partial Q}{\partial\rho};\ R^m \equiv \frac{\partial Q}{\partial\varphi}. \tag{10}$$

Здесь $\varkappa$ — удельный электрический заряд; $\mathcal{W}_i$ — обобщенный векторный потенциал; p — давление; R^m — удельная скорость ввода массы. Соотношение (4) есть закон Кулона, (5) — представление для скорости (в общем случае неявное), (6) — обобщение интеграла Лагранжа — Коши, (7) — уравнение неразрывности с учетом источников массы, (8) и (9) — уравнения для обобщенных координат и импульсов. Подставляя выражение (3) для напряженности электрического поля в закон Кулона (4), имеем

$$\varepsilon_0 \Delta \Phi = -\rho \varkappa, \tag{11}$$

где Δ — оператор Лапласа. Полагая в соотношениях (3) — (9), а также в первом, втором и четвертом соотношениях (10) $\rho = \mathrm{const}$, получаем условия стационарности для несжимаемой среды. При этом третье из соотношений (10) (выражение для давления) не имеет силы. Для определения давления в этом случае служит обобщение интеграла Лагранжа — Коши (6).

Уравнения движения и энергии. Вычисляя полную (субстанциональную) производную по времени от величин v и $(Q - v_j \mathcal{W}_j)$, с использованием условий стационарности (3) — (10) находим

$$\frac{\partial (\mathbf{v} - \mathcal{W})}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} (\mathbf{v} - \mathcal{W}) + \nabla \frac{v_j^2}{2} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \varkappa \mathbf{E} + \nabla^* (v_j \mathcal{W}_j - Q) +$$
$$+ v_j (\nabla - \nabla^*) \mathcal{W}_j - R^m (\mathbf{v} - \mathcal{W}); \tag{12}$$

$$\frac{d (Q - v_j \mathcal{W}_j)}{dt} = \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} + \varkappa \frac{d\Phi}{dt} + \frac{d^* (Q - v_j \mathcal{W}_j)}{dt} +$$
$$+ v_j \frac{(d^* - d) \mathcal{W}_j}{dt} + R^m \left(\frac{v_j^2}{2} - Q - \frac{p}{\rho} \right). \tag{13}$$

Звездочка у знаков дифференцирования по аргументам t и x_i всюду означает, что его результат определяется только явной зависимостью дифференцируемых величин от соответствующего аргумента. Соотношения 12), (13) представляют собой уравнения движения и энергии электрогидродинамики, соответствующие функционалу (1), (2). Отметим, что произвол в выборе обобщенной энергии Q как функции своих аргументов может быть использован для аппроксимации реальных состояний и источников заряда, массы, импульса и энергии. В частности, традиционная модель электрогидродинамики с «вмороженным» в среду зарядом описывается следующей специализацией обобщенной энергии:

$$Q = \mathscr{E}(\rho, X) + \varkappa(X)\Phi + \frac{d^* \chi}{dt}; \quad \chi = \chi(t, x, X), \tag{14}$$

где $\mathscr{E}$ — внутренняя энергия единицы массы среды; χ — произвольно заданная функция своих аргументов. Здесь и далее входящие в обобщенную энергию слагаемые с функцией χ описывают свойство градиентной инвариантности электрогидродинамического поля, аналогичное градиентной инвариантности электромагнитного поля [7], а также градиентной инвариантности гидродинамического поля [12].

Законы сохранения. Пусть функция Лагранжа L_0 явным образом не зависит от времени, $d^*Q/dt = 0$. Тогда на основе исходного функционала получаем закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g} \rho \left(\frac{v_j^2}{2} + Q - v_j \mathcal{W}_j - \varkappa \Phi + \frac{\varepsilon_0 E_j^2}{2} \right) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\sqrt{g} \rho}{h_k} \left[v_k \left(\frac{v_j^2}{2} + Q - v_j \mathcal{W}_j + \frac{p}{\rho} \right) + i_k^d \Phi \right] = 0; \quad i_i^d \equiv \frac{\varepsilon_0 \partial E_i}{dt}. \tag{15}$$

Пусть функция Лагранжа L_0 явным образом не зависит от какой-либо из координат x_i, $\partial^* Q / \partial x_i = 0$, $\partial h_j / \partial x_i = 0$, $j = 1, 2, 3$. Тогда на основе исходного функционала получаем закон сохранения i-й компоненты импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g} \rho h_i (v_i - \mathcal{W}_i) +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{g} \left[\frac{\rho v_k}{h_k} h_i (v_i - \mathcal{W}_i) - \frac{\varepsilon_0 E_k}{h_k} h_i E_i + \left(p + \frac{\varepsilon_0 E_j^2}{2} \right) \delta_i^k \right] = 0. \tag{16}$$

Интегралы симметрии. Пусть время является циклической переменной; $\partial/\partial t = 0$. Тогда из соотношения (6) получаем

$$\frac{v_j^2}{2} + Q - v_j \mathcal{W}_j + \frac{p}{\rho} = 0. \qquad (17)$$

Соотношение (17) представляет собой обобщение интеграла Бернулли. Если циклической переменной является координата x_3, $\partial/\partial x_3 = 0$, то из соотношения (5) получаем

$$v_3 - \mathcal{W}_3 = 0. \qquad (18)$$

Соотношение (18) представляет собой интеграл симметрии по пространственной координате x_3.

Обобщение теоремы о вихре. Пусть имеет место специализация

$$Q = Q_0(t,\ x,\ \Phi,\ v,\ \rho) + \gamma(t)(\varphi + \chi) + \frac{d^*\chi}{dt}; \quad \mathcal{W}_{0i} \equiv \frac{\partial Q_0}{\partial v_i}, \qquad (19)$$

где Q_0 и γ — произвольно заданные функции своих аргументов, величина χ определяется согласно (14). (Заметим, что определение (19) для $\mathcal{W}_{0i}$ будет использовано далее при рассмотрении стационарных с циклической координатой, изоэнергетических и потенциальных течений.) Для специализации (19) уравнение движения (12) преобразуется к виду

$$\frac{\partial(\mathbf{v} - \mathcal{W}_0)}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot}(\mathbf{v} - \mathcal{W}_0) + \gamma(\mathbf{v} - \mathcal{W}_0) +$$

$$+ \nabla\left(\frac{v_j^2}{2} + Q - v_j \mathcal{W}_{0j} + \frac{p}{\rho}\right) = 0. \qquad (20)$$

Применяя к (20) операцию ротора, получаем

$$\frac{\partial \mathcal{W}_*}{\partial t} = \operatorname{rot}\ \mathbf{v} \times \omega_*; \quad \omega_* \equiv e^{\int \gamma dt} \operatorname{rot}(\mathbf{v} - \mathcal{W}_0). \qquad (21)$$

Соотношение (21) представляет собой закон сохранения («вмороженности») соленоидального вектора ω_*. В качестве частной специализации он содержит соответствующий закон сохранения работы [12].

Стационарные с циклической координатой течения. Пусть течения стационарные, координата x_3 является циклической и

$$Q = Q_0(x_1,\ x_2,\ \Phi,\ v,\ \rho,\ X) + \frac{d^*\chi}{dt}; \ \chi = -tB(X) + x_3 w_3(X) + \chi_1(x_1,\ x_2,\ X); \qquad (22)$$

Здесь Q_0, B, w_3 и χ_1 — произвольно заданные функции своих аргументов. Отметим, что специализация (22) включает, в частности, традиционную модель электрогидродинамики с «вмороженным» в среду зарядом. Не уменьшая общности, в рассматриваемом случае набор обобщенных координат X можно отождествить с одной величиной — функцией тока ψ, через которую вектор скорости выражается следующим образом:

$$\mathbf{v} = \frac{\rho^0}{\rho h_3} \nabla\psi \times \mathbf{e}_3 + v_3 \mathbf{e}_3, \qquad (23)$$

где ρ^0 — положительная величина размерности плотности; e_3 — единичный вектор в направлении оси x_3. Выражение (23) представляет собой решение уравнения неразрывности. Подставим выражение (23) в уравнение движения (12). В силу принятого предположения о симметрии третья компонента полученного соотношения удовлетворяется тождественно. Первые две его компоненты приводят к следующему уравнению:

$$\frac{\rho_0}{\rho h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1} h_2(-v_2 + \mathcal{W}_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} h_1(v_1 - \mathcal{W}_1)\right] +$$

$$+ \frac{\partial(Q_0 - B)}{\partial \psi} + \frac{w_3 + h_3 \mathcal{W}_{03}}{h_3^2} \frac{dw_3}{d\psi} = 0. \qquad (24)$$

Подставим выражения (22), (23) в соотношения (17), (18). Разрешая получившиеся соотношения относительно величин v_3 и ρ, можно получить зависимости

$$v_3 = v_3(x_1,\ x_2,\ \Phi,\ \psi,\ \nabla,\ \psi); \quad \rho = \rho(x_1,\ x_2,\ \Phi,\ \psi,\ \nabla\psi). \tag{25}$$

С учетом зависимостей (23), (25) получаем, что задача сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (11), (24) для определения электрического потенциала и функции тока. Если среда несжимаемая, величина $(Q_0 - B)$ является полиномом степени не выше второй по величинам Φ, v_i и ψ, а величина w_3 — полиномом степени не выше первой по величине ψ, то задача сводится к системе двух линейных уравнений.

Изоэнергетические течения. Пусть течения стационарные и

$$Q = Q_0(x,\ \Phi,\ v,\ \rho) + \frac{d^*\chi}{dt}; \quad \chi = -tB_0 + \chi_0(x,\ X). \tag{26}$$

Здесь Q_0 и χ_0 — произвольно заданные функции своих аргументов; B_0 — постоянная. Тогда из уравнений движения (12) и неразрывности (7) следует, что

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} - \mathcal{W}_0) = \lambda\rho\mathbf{v}; \quad (\mathbf{v}\nabla)\lambda = 0. \tag{27}$$

С помощью (17) при выполнении условия $\partial(Q_0 - v_j\mathcal{W}_{0j} + p/\rho)/\partial\rho \neq 0$ можно найти зависимость $\rho = \rho(x,\ \Phi,\ v)$. Таким образом, получаем, что в рассматриваемом случае задача сводится к системе уравнений (11), (27) для определения пяти величин Φ, v_1, v_2, v_3 и λ. Если среда несжимаемая, величина λ постоянная, а обобщенная энергия Q является полиномом степени не выше второй по величинам Φ и v_i, то задача сводится к системе четырех линейных уравнений. Отметим, что в гидродинамике стационарные с циклической координатой и изоэнергетические течения впервые были рассмотрены Громекой [11].

Потенциальные течения. Пусть имеют место соотношения

$$\Pi = 0; \quad Q = Q_0(t,\ x,\ \Phi,\ v,\ \rho,\ \varphi) + \frac{d\chi}{dt}; \quad \chi = \chi(t,\ x), \tag{28}$$

где величины Q_0 и χ — произвольно заданные функции своих аргументов. В этом случае соотношения (5), (6) принимают вид

$$\mathbf{v} - \mathcal{W}_0 = \nabla(\varphi + \chi); \quad \frac{v_j^2}{2} + Q_0 - v_j\mathcal{W}_{0j} + \frac{p}{\rho} + \frac{\partial(\varphi + \chi)}{\partial t} = 0. \tag{29}$$

Пусть выполнено условие $\partial[\mathbf{v} - \mathcal{W}_0,\ (v_j^2/2) + Q_0 - v_j\mathcal{W}_{0j} + (p/\rho)]/\partial(\mathbf{v},\ \rho) \neq$ $\neq 0$. Разрешая тогда систему уравнений (29) относительно скорости и плотности, получаем зависимости

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(Y); \quad \rho = \rho(Y); \quad Y \equiv \left\{t,\ x,\ \Phi,\ \varphi,\ \frac{\partial\varphi}{\partial t},\ \nabla\varphi\right\}. \tag{30}$$

С учетом соотношений (30) получаем, что задача сводится к системе двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (7), (11) для определения потенциалов Φ и φ. Если среда несжимаемая, а обобщенная энергия Q является полиномом степени не выше второй по величинам Φ, v_i и φ, то задача сводится к системе двух линейных уравнений.

Выше для стационарных с циклической координатой, изоэнергетических и потенциальных течений были отмечены случаи, когда задача сводится к решению систем линейных уравнений. Это обстоятельство может предоставить известные преимущества при конкретном анализе.

Функционал в эйлер-лагранжевом представлении. В переменных Эйлера — Лагранжа аналогом функционала (1), (2) является следующий информационный функционал:

$$S(t,\ x_0,\ E,\ \Phi,\ x,\ \rho;\ *) = \iiiint (L_0 + L_*)\, dx_{01}\, dx_{02} dx_{03} dt; \tag{31}$$

$$L_0 \equiv \sqrt{g_0}\rho_0 \left\{ \frac{h_j^2 \dot{x}_j^2}{2} - Q + \frac{p}{\rho}\left[\frac{\sqrt{g}\rho}{\sqrt{g_0}\rho_0} \frac{D(x)}{D(x_0)} - 1 \right] \right\} - \varepsilon_0 \sqrt{g} \left[\frac{E_j^2}{2} \frac{D(x)}{D(x_0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{E_1}{h_1} \frac{\partial(\Phi, x_2, x_3)}{\partial(x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3})} + \frac{E_2}{h_2} \frac{\partial(x_1, \Phi, x_3)}{\partial(x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3})} + \frac{E_3}{h_3} \frac{\partial(x_1, x_2, \Phi)}{\partial(x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3})} \right]; \quad (32)$$

$$Q = Q(Z); \quad \rho_0 = \rho_0(Z); \quad p = \left(\frac{\partial \rho_0 Q}{\partial \rho} - \frac{h_j^2 \dot{x}_j^2}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial \rho} \right) / \left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho}{\rho_0} \right);$$

$$Z \equiv \{t, x_0, \Phi, x, x, \rho\}; \quad t = 0; \quad x_i = x_{0i}; \quad g = g_0; \quad \rho = \rho_0.$$

Здесь обозначения аналогичны принятым в работе [13].

Условия стационарности. Варьируя функционал (31), (32) по функциям сравнения E_1, Φ, ρ и x_1, получаем

$$E_1 = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial(\Phi, x_2, x_3)}{\partial(x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3})} \Big/ \frac{D(x)}{D(x_0)}; \quad (33)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\sqrt{g}E_1}{h_1}, x_2, x_3\right)}{\partial(x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3})} + \frac{\partial\left(x_1, \frac{\sqrt{d}E_2}{h_2}, x_3\right)}{\partial(x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3})} + \frac{\partial\left(x_1, x_2, \frac{\sqrt{g}E_3}{h_3}\right)}{\partial(x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3})} = \frac{\sqrt{g_0}\rho_0 \varkappa}{\varepsilon_0}; \quad (34)$$

$$\frac{\sqrt{g}\rho}{\sqrt{g_0}\rho_0} \frac{D(x)}{D(x_0)} = 1 \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} = 0 \right); \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_0 h_1 (h_1 \dot{x}_1 - W_1) = -\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_0}} \frac{\partial(p, x_2, x_3)}{\partial(x_{0_1}, x_{0_2}, x_{0_3})} +$$

$$+ \rho_0 \varkappa h_1 E_1 + \frac{\dot{x}_j^2}{2} \frac{\partial^* \rho_0 h_j^2}{\partial x_1} - \frac{\partial^* \rho_0 Q}{\partial x_1} - \frac{p}{\rho} \frac{\partial^* \rho_0}{\partial x_1};$$

$$h_1 W_1 \equiv \frac{\partial Q}{\partial x_1} + \left(Q + \frac{p}{\rho} - \frac{h_j^2 x_j^2}{2} \right) \frac{\partial \rho_0}{\rho_0 \partial x_1}; \quad (36)$$

$$\varkappa \equiv \frac{\partial Q}{\partial \Phi} + \left(Q + \frac{p}{\rho} - \frac{h_j^2 x_j^2}{2} \right) \frac{\partial \rho_0}{\rho_0 \partial \Phi}.$$

Результаты варьирования функционала (31), (32) по функциям сравнения E_2, E_3, x_2 и x_3 получаем соответственно из выражений (33), (36) циклической перестановкой индексов 1, 2 и 3.

Соотношения (34) — (36) представляют собой закон Кулона и уравнения неразрывности и движения электрогидродинамики в эйлер-лагранжевом представлении при наличии источников заряда, массы, импульса и энергии. Произвол в выборе величины Q и ρ_0 как функций своих аргументов может быть использован для аппроксимации реальных состояний и источников заряда, массы, импульса и энергии.

1. *Бурак Я. Й., Галапац Б. П., Гнідець Б. М.* Фізико-механічні процеси в електропровідних тілах.— К.: Наук. думка, 1978.— 232 с.
2. *Варенцов О. К., Ватажин А. Б., Грабовский В. И.* Обтекание тел сверхзвуковым электрогазодинамическим потоком.— В кн.: IV Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике: Аннот. докл. Киев, 1976, с. 45—46.
3. *Верещагин И. П., Левитов В. И., Мирзабекян Г. З., Пашин М. М.* Основы электрогазодинамики дисперсных систем.— М.: Энергия, 1974.— 356 с.
4. *Гогосов В. В., Полянский В. А.* Электрогидродинамика: Задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения.— В кн.: Итоги науки и техники: Механика жидкости и газа. М., 1976, т. 10, с. 5—85.
5. *Григолюк Э. И., Подстригач Я. С., Бурак Я. И.* Вариационные принципы и экстремальные задачи термоупругости.— В кн.: XIV науч. совещ. по тепловым напряжениям в элементах конструкций. Киев, 1977, с. 32—33.
6. *Касьянов В. А., Мхитарян А. М.* К теории сильных разрывов в электрогидродинамике.— Магнит. гидродинамика, 1970, № 2, с. 17—22.
7. *Медведев Б. В.* Начала теоретической физики.— М.: Наука, 1977.— 496 с.

8. *Мхитарян А. М., Ушаков В. В.* Распространение аэрозольной струи в газовом и аэрозольном потоках.— В кн.: IV Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике : Аннот. докл. Киев, 1976, с. 68.
9. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Вариационная форма уравнений теории термодиффузионных процессов в деформируемом твердом теле.— Прикл. математика и механика, 1969, 33, № 4, с. 774—776.
10. *Рубашов И. Б., Бортников Ю. С.* Электрогазодинамика.— М.: Атомиздат, 1971.— 168 с.
11. *Салтанов Н. В.* Некоторые модели электромагнитной гидродинамики.— Прикл. математика, 1971, вып. 3, с. 125—150.
12. *Салтанов Н. В.* Обобщение вариационной модели гидродинамики в эйлеровом представлении.— В кн.: Современные проблемы гидромеханики и гидротехники. Киев: Наук. думка, 1977, с. 39—47.
13. *Салтанов Н. В.* Обобщение вариационного принципа гидродинамики в представлении Эйлера — Лагранжа.— В кн.: Аналитические и численные методы теории переноса. Минск, 1977, с. 107—114.
14. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1976.— Т. 1. 536 с.
15. *Ткалич В. С.* Квантовая динамика.— К: Наук. думка, 1974.— 180 с.
16. *Ткалич В. С.* Теория оптимального управления.— К.: Изд-во Киев. политехн. ин-та, 1976.— 119 с.
17. *Швец Р. Н., Дасюк Я. И.* Некоторые общие теоремы для смешанных динамических задач термодиффузии деформируемых твердых тел.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1978, вып. 8, с. 55—61.

Институт гидромеханики
АН УССР

Поступила в редколлегию
05.09.78

УДК 539.3

Ю. З. Повстенко

О ЗАВИСИМОСТИ ПОВЕРХНОСТНЫХ УСИЛИЙ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ ОТ КРИВИЗНЫ ПОВЕРХНОСТИ

На границе твердого тела вследствие окисления, нанесения специального покрытия или в связи с перегруппировкой атомов возникает тонкий приповерхностный слой. Его механическое состояние описывается с помощью тензора поверхностных усилий, тогда как в случае жидкой поверхности было достаточно одной скалярной величины — поверхностного натяжения.

Поверхностные усилия $N_{\alpha\beta}$ (α, $\beta = 1, 2$) связаны с плотностью поверхностной энергии γ формулой Херринга [6]

$$N_{\alpha\beta} = \gamma\delta_{\alpha\beta} + \frac{\partial\gamma}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}. \tag{1}$$

Компоненты тензора деформации приповерхностного слоя выражаются через компоненты вектора перемещений $\vec{u}_0$ по известным формулам [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}v_0 + \frac{w_0}{R_1}; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_2}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_0 + \frac{w_0}{R_2}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{v_0}{A_2}\right) + \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{u_0}{A_1}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь α_1, α_2 — ортогональные криволинейные координаты на поверхности; A_1, A_2 — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны.

В линейном приближении

$$N_{\alpha\beta} = \gamma_0\delta_{\alpha\beta} + N^*_{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Постоянная γ_0 представляет собой ту часть поверхностной энергии, которая не зависит от деформации; $N^*_{\alpha\beta}$ — дополнительные поверхностные