неустойчива к изменениям угла характеристики направленности набегающей волны и частоты.

Кривые на рис. 4 иллюстрируют зависимость значений величины $|F^0|$ от угла θ_0 для трех различных частот при $\theta = 0$, $r = l_0 \gg 1$. Как видно, модуль амплитуды давления $\bar{p}_e$ при малых участках облучения сферы мало зависит от незначительного изменения частоты ω. Однако при увеличении углов θ_0 картина существенно меняется.

1. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Нестационарная гидроупругость оболочек.— Л. : Судостроение, 1974.— 208 с.
2. *Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э.* Эхо-сигналы от упругих объектов.— Таллин : Изд-во АН ЭССР, 1974.— Т. 1. 346 с.
3. *Поддубняк А. П.* Эхо-сигнал от упругой сферы при воздействии остронаправленного звукового импульса.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 8, с. 92—96.
4. *Подстригач Я. С., Поддубняк А. П., Грилицкий Д. В.* Дифракция остронаправленного звукового импульса на акустически мягкой сфере.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 3, с. 238—241.
5. *Скучик Е.* Основы акустики.— М. : Мир, 1976.— Т. 2. 432 с.
6. *Ультразвуковые* преобразователи / Под ред. Е. Кикучи.— М. : Мир, 1972.— 424 с.
7. *Doolittle R. D., Überall H., Ugincius P.* Sound scattering by elastic cylinders.— J. Acoust. Soc. Amer., 1968, 43, N 1, p. 1—14.
8. *Hickling R.* Analysis of echoes from a solid elastic sphere in water.— J. Acoust. Soc. Amer., 1962, 34, N 10, p. 1582—1592.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
02.11.78

УДК 539.3 : 534.231

Д. В. Грилицкий, В. Я. Онищук

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ ОТ ПОЛОЙ ПУСТОЙ УПРУГОЙ СФЕРЫ

Несмотря на большое количество публикаций, посвященных проблеме взаимодействия упругих объектов с акустическими волнами, к настоящему времени является малоизученным вопрос о характере излученного поля от сферического объекта в случае остронаправленного зондирующего импульса, в частности, когда к поверхности упругой сферы приложена сосредоточенная сила, изменяющаяся во времени по определенному закону.

Определим нестационарное звуковое поле от полой пустой упругой сферы при действии на ее внешнюю поверхность сосредоточенной силы конечной длительности.

Рассмотрим полую пустую упругую сферу, погруженную в безграничную идеальную сжимаемую жидкость, на которую действует сосредоточенный силовой импульс p_l конечной длительности, приложенный к внешней поверхности сферы в точке с координатами $(1, \theta_0, \varphi_0)$, причем

$$p_l = p_0 f(\tau) \frac{\delta(\theta - \theta_0)\,\delta(\varphi - \varphi_0)}{\sin\theta}\,[H(\tau) - H(\tau - \tau_0)];$$
$$\tau = Ct/R_1; \quad \tau_0 = Ct_0/R_1. \tag{1}$$

Здесь и далее p_l — давление, вызванное сосредоточенным импульсом; p_0 — постоянная, имеющая размерность давления; $f(\tau)$ — функция, определяющая закон изменения давления в импульсе; $H(\tau)$ — единичная функция Хевисайда; $\delta(x)$ — функция Дирака; t — время, отсчитываемое с момента включения силового импульса; t_0 — длительность импульса; R_1 и R_2 — внешний и внутренний радиусы сферы соответственно; R, θ, φ — сферические координаты; ρ, C — плотность жидкости и скорость звука в окружающей сферу жидкости; E, ν, ρ_1 — модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала сферы; σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{r\varphi}$ — компоненты тензора напряжений для сферы. Все линейные величины отнесены к внешнему радиусу сферы.

Потенциал перемещений Φ для акустической среды, окружающей сферу, удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}, \tag{2}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа.

Вектор перемещений $\vec{u}_e\,(u_{er},\ u_{e\theta},\ u_{e\varphi})$ и давление p_e в акустической среде через потенциал Φ определяются по формулам

$$\vec{u}_e = \operatorname{grad}\Phi;\quad p_e = -\rho C^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}. \tag{3}$$

Если вектор упругого перемещения $\vec{u}\,(u_r,\ u_\theta,\ u_\varphi)$ для сферы представить в виде суммы потенциального и соленоидального полей

$$\vec{u} = \operatorname{grad} k + \operatorname{rot}\vec{\Psi};\quad \operatorname{div}\vec{\Psi} = 0, \tag{4}$$

то уравнение движения изотропного упругого тела можно представить в виде двух независимых волновых уравнений

$$\nabla^2 k = \frac{1}{\beta_1^2}\frac{\partial^2 k}{\partial\tau^2};\quad \nabla^2\vec{\Psi} = \frac{1}{\beta_2^2}\frac{\partial^2\vec{\Psi}}{\partial\tau^2}, \tag{5}$$

где $\beta_1 = C_1/C$; $\beta_2 = C_2/C$; $C_1 = [E(1-\nu)/(\rho_1(1+\nu)(1-2\nu))]^{\frac{1}{2}}$ и $C_2 = [E/(2\rho_1(1+\nu))]^{\frac{1}{2}}$ — скорости распространения волн расширения и волн сдвига в сфере.

Задача определения нестационарного звукового поля, излучаемого сферой в акустическую среду, состоит в интегрировании волновых уравнений (2) и (5) при следующих условиях:

а) начальные условия нулевые;

б) условие излучения Зоммерфельда (при $r \to \infty$):

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial\tau}\right)\Phi = 0,\quad r = R/R_1; \tag{6}$$

в) условия контакта на наружной поверхности сферы (при $r = 1$):

$$\sigma_{rr} + p_e + p_i = 0;\quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = 0;\quad u_r - u_{er} = 0; \tag{7}$$

г) условия контакта на внутренней поверхности сферы (при $r = r_2 = R_2/R_1$):

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = 0. \tag{8}$$

Предполагаем, что рассматриваемые функции принимают конечные значения в областях, где они определяются.

Для нахождения решения задачи применим интегральное преобразование Фурье по времени и, разложив дельта-функцию в ряд по тессеральным сферическим функциям, представим сосредоточенный импульс (1) в следующем виде:

$$p_i^F = p_0\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\Phi_n^m(\theta,\varphi), \tag{9}$$

где $\Phi_n^m(\theta,\varphi) = P_n^m(\cos\theta)\,[a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi]$; $a_{nm} = f^F(\omega)\,A_{nm}$; $b_{nm} = f^F(\omega)\,B_{nm}$; ω — параметр преобразования Фурье; $f^F(\omega)$ — изображение Фурье от $f(\tau)\,[H(\tau) - H(\tau-\tau_0)]$; A_{nm} и B_{nm} — коэффициенты разложения дельта-функции в ряд по тессеральным сферическим функциям. Индекс F сверху обозначает преобразование Фурье.

Применив преобразование Фурье к волновым уравнениям (2), (5) и условию излучения (6), с учетом нулевых начальных условий получим

$$(\nabla^2 + \omega^2)\,\Phi^F = 0; \tag{10}$$

$$(\nabla^2 + \omega_1^2) k^F = 0, \quad \omega_1 = \omega/\beta_1; \tag{11}$$

$$(\nabla^2 + \omega_2^2) \vec{\Psi}^F = 0, \quad \omega_2 = \omega/\beta_2; \tag{12}$$

$$\lim_{r \to \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} + i\omega \right) \Phi^F = 0. \tag{13}$$

Решение уравнения (10), удовлетворяющее условию (13), ищем в виде бесконечного ряда

$$\frac{E}{1+\nu} \Phi^F = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\omega r)\, x_n(\omega) \sum_{m=0}^{n} \Phi_n^m(\theta, \varphi), \tag{14}$$

где $h_n(\omega r)$ — сферическая функция Ханкеля первого рода; $x_n(\omega)$ — искомые коэффициенты.

Следуя работе [1], решение векторного волнового уравнения (12) представим в виде

$$\vec{\Psi}^F = \operatorname{rot}(\vec{i}_r r \chi_2^F) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{i}_r r \chi_1^F). \tag{15}$$

Здесь $\vec{i}_r$ — единичный вектор в радиальном направлении.

Каждая из скалярных функций χ_j^F $(j = 1, 2)$ удовлетворяет одному и тому же волновому уравнению

$$(\nabla^2 + \omega_2^2) \chi^F = 0. \tag{16}$$

Общие решения уравнений (11) и (16) в сферических координатах r, θ, φ разыскиваем в виде бесконечных рядов

$$\frac{E}{1+\nu} k^F = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\omega_1 r) \sum_{m=0}^{n} \Phi_n^m(\theta, \varphi), \tag{17}$$

$$\frac{E}{1+\nu} \chi^F = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\omega_2 r) \sum_{m=0}^{n} \Phi_n^m(\theta, \varphi), \tag{18}$$

где $Z_n(\omega_i r) = C_{in} j_n(\omega_i r) + D_{in} n_n(\omega_i r)$, $i = 1, 2$; $j_n(\omega_i r)$, $n_n(\omega_i r)$ — сферические функции Бесселя и Неймана соответственно; C_{in}, D_{in} — произвольные постоянные.

Компоненты вектора упругого перемещения для сферы в пространстве изображений Фурье через решения (17) и (18) определяются по формуле

$$\vec{u}^F = a_1 \operatorname{grad} k^F + a_2 \operatorname{rot}(\vec{i}_r r \chi_1^F) + a_3 \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\vec{i}_r r \chi_2^F), \tag{19}$$

где a_1, a_2, a_3 — произвольные постоянные.

Используя соотношения деформации — перемещения, напряжения — деформации и удовлетворяя преобразованным по Фурье условиям контакта (7) и (8), для нахождения безразмерных неизвестных комплексных коэффициентов $x_n(\omega)$ для каждого члена ряда (14) получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &\alpha_{11} a_n + \beta_{11} b_n + \alpha_{12} c_n + \beta_{12} d_n + (\alpha_{13} + i\beta_{13}) x_n = \alpha_{10}; \\ &\alpha_{21} a_n + \beta_{21} b_n + \alpha_{22} c_n + \beta_{22} d_n + (\alpha_{23} + i\beta_{23}) x_n = 0; \\ &\alpha_{31} a_n + \beta_{31} b_n + \alpha_{32} c_n + \beta_{32} d_n = 0; \\ &\alpha_{41} a_n + \beta_{41} b_n + \alpha_{42} c_n + \beta_{42} d_n = 0; \\ &\alpha_{51} a_n + \beta_{51} b_n + \alpha_{52} c_n + \beta_{52} d_n = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Коэффициенты α_{ij} определяются согласно формулам

$$\alpha_{11} = \omega_1^2 \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} j_n(\omega_1) - j_n''(\omega_1) \right];$$

$$\alpha_{12} = n(n+1)\,[j_n(\omega_2) - \omega_2 j_n'(\omega_2)];$$

$$\alpha_{13} = -\frac{\rho C^2 (1+\nu)}{E} \omega^2 j_n(\omega);$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{10} = 1;\\
&\alpha_{21} = \omega_1 j_n'(\omega_1);\\
&\alpha_{22} = n(n+1)\, j_n(\omega_2);\\
&\alpha_{23} = -\omega j_n'(\omega);\\
&\alpha_{31} = (\omega_1 r_2)^2 \left[\frac{\nu}{1-2\nu} j_n(\omega_1 r_2) - j_n''(\omega_1 r_2)\right];\\
&\alpha_{32} = n(n+1)\,[j_n(\omega_2 r_2) - \omega_2 r_2 j_n'(\omega_2 r_2)];\\
&\alpha_{41} = 2\,[j_n(\omega_1) - \omega_1 j_n'(\omega_1)];\\
&\alpha_{42} = -\omega_2^2 j_n''(\omega_2) - (n^2+n-2)\, j_n(\omega_2);\\
&\alpha_{51} = 2\,[j_n(\omega_1 r_2) - \omega_1 r_2 j_n'(\omega_1 r_2)];\\
&\alpha_{52} = -(\omega_2 r_2)^2 j_n''(\omega_2 r_2) - (n^2+n-2)\, j_n(\omega_2 r_2);\\
&a_n = a_1 C_{1n};\quad b_n = a_1 D_{1n};\quad c_n = a_3 C_{2n};\quad d_n = a_3 D_{2n}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Штрих обозначает производную по аргументу.

Коэффициенты β_{ij} получаем из α_{ij} путем замены в последних сферических функций Бесселя $j_n(\omega)$ на сферические функции Неймана $n_n(\omega)$.

Решение системы (20) можно представить в виде [2]

$$
x_{1n} = \frac{1}{\Delta}(\alpha_{23} - \varkappa_n \alpha_{13})\, \varkappa_n \alpha_{10};\quad x_{2n} = -\frac{1}{\Delta}(\beta_{23} - \varkappa_n \beta_{13})\, \varkappa_n \alpha_{10}. \tag{22}
$$

Здесь $x_n = x_{1n} + i x_{2n}$; $\Delta = (\alpha_{23} - \varkappa_n \alpha_{13})^2 + (\beta_{23} - \varkappa_n \beta_{13})^2$;

$$
\varkappa_n = \frac{\alpha_{21}\xi_{1n} + \beta_{21}\xi_{2n} + \alpha_{22}\xi_{3n} + \beta_{22}}{\alpha_{11}\xi_{1n} + \beta_{11}\xi_{2n} + \alpha_{12}\xi_{3n} + \beta_{12}},
$$

а ξ_{jn} $(j = 1, 2, 3)$ есть решение следующей системы уравнений:

$$
\alpha_{k1}\xi_{1n} + \beta_{k1}\xi_{2n} + \alpha_{k2}\xi_{3n} + \beta_{k2} = 0,\quad k = 3, 4, 5. \tag{23}
$$

Если представить изображение давления в излученном поле в виде

$$
p_e^F = p_0 f^F(\omega)\, F^F(\omega), \tag{24}
$$

где

$$
F^F(\omega) = \rho C^2 \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_n(\omega r)\, x_n(\omega) \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\cos\theta)\,[A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi]
$$

— единичное стационарное поле от сферы, то переход в область оригиналов будет осуществляться по формуле

$$
\frac{p_e}{p_0} = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} f^F(\omega)\, F^F(\omega) \exp(-i\omega\tau)\, d\omega. \tag{25}
$$

Вследствие четности подынтегральной функции формулу (25) можно переписать так:

$$
\frac{p_e}{p_0} = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty} f^F(\omega)\, F^F(\omega) \exp(-i\omega\tau)\, d\omega. \tag{26}
$$

Вычисление интеграла (26) осуществлялось методом численного интегрирования Ромберга [3]. Закон изменения давления в сосредоточенном импульсе принимался синусоидальным, т. е.

$$
f(\tau) = \sin \omega_0 \tau, \tag{27}
$$

где ω_0 — частота синусоидального заполнения.

Численные расчеты звукового поля проводились в дальнем поле ($r \gg 1$) на оси действия сосредоточенного импульса ($\theta = 0$), по которой направлена ось z декартовой системы координат ($\theta_0 = 0$).

В случае стационарной задачи программа составлена на языке АЛГОЛ-60 и реализована на ЭВМ М-222, в случае нестационарной — на языке ФОРТРАН-IV и реализована на ЭВМ ЕС-1022.

На рис. 1—4 представлены графики излученного поля от полой пустой алюминиевой сферы ($E = 6,76 \cdot 10^5$ кг/см^2; $\nu = 0,355$; $\rho_1 = 2,7$ г/см^3) в воде ($\rho = 1,0$ г/см^3; $C = 1410$ м/с).

На рис. 1 показана зависимость амплитуды стационарного звукового поля $F_\infty(\omega) = rF^F(\omega)$ $(r \gg 1)$ от безразмерной частоты $\omega = \Omega R_1/C$, где

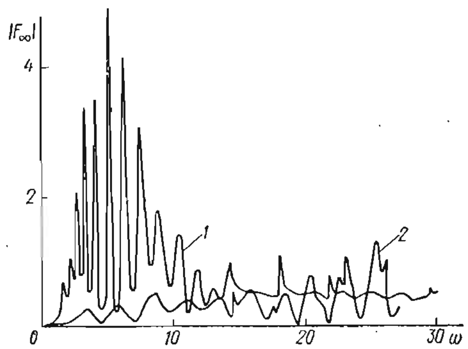

Рис. 1

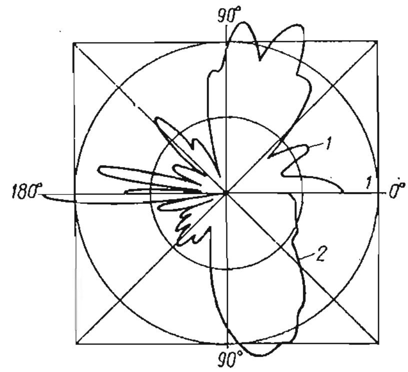

Рис. 2

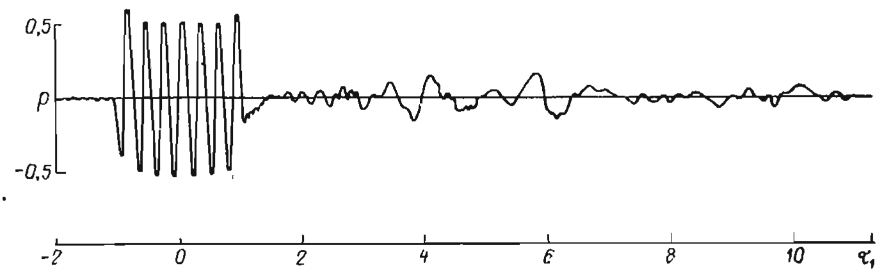

Рис. 3

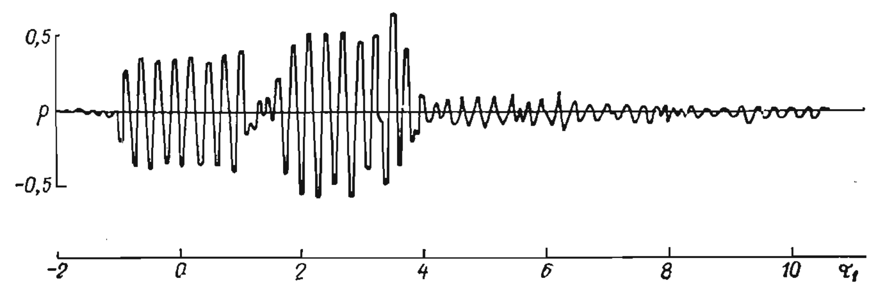

Рис. 4

Ω — круговая частота импульса. Кривая *1* получена для отношения внутреннего радиуса к внешнему $r_2 = 0,9$, кривая *2* — для $r_2 = 0,6$. Из рис. 1 и анализа численных расчетов, проведенных для различных материалов и различной толщины сферы, видно, что в случае низких частот ($0 \leqslant \omega \leqslant 12$) основной вклад в стационарное поле, излучаемое тонкой пустой упругой сферой, дает изгибная мода колебаний (кривая *1*). С увеличением толщины сферы или жесткости материала этот вклад существенно уменьшается (кривая *2*).

На рис. 2 приведена диаграмма изменения амплитуды стационарного звукового поля в зависимости от угла θ для частоты $\omega_0 = 21,9$ (кривая *1*), соответствующей пику амплитуды стационарного поля (см. рис. 1, кривая *1*), и частоты $\omega_0 = 21{,}8$ (кривая *2*), соответствующей впадине амплитуды стационарного поля.

На рис. 3 показан график нестационарного звукового поля $p = rp_c/p_0$ $(r \gg 1)$ в зависимости от безразмерного времени $\tau_1 = \tau - r$ для частоты $\omega_0 = 21{,}9$ при $\tau_0 = 2{,}0$ и $r_2 = 0{,}9$. Характерным для этого графика является то, что в точку наблюдения приходит только одна составляющая поля, вызванная излучением области сферы, находящейся под сосредоточенной силой. Другие составляющие, вызванные волнами Франца и волнами изгиба, имеют незначительную амплитуду, что полностью согласуется с рис. 1 (кривая *1*). Аналогичные результаты при тех же параметрах получаются и при $\omega_0 = 21{,}8$

На рис. 4 представлен график нестационарного звукового поля при частоте $\omega_0 = 23{,}1$, соответствующей пику амплитуды стационарного поля (см. рис. 1, кривая *2*) при следующих параметрах: $\tau_0 = 2{,}0$, $r_2 = 0{,}6$ Наличие вторичного компонента звукового поля вызвано, по-видимому, волнами, отраженными от внутренней поверхности сферического объекта.

1. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики.— М.: Изд-во иностр. лит., 1960.— Т. 2. 886 с.
2. *Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э.* Эхо-сигналы от упругих объектов.— Таллин: Изд-во АН ЭССР, 1974.— Т. 2. 345 с.
3. *Bauer F. L., Rutishauer H., Stiefel S.* New aspects in numerical quadrature.— Proc. Symp. Appl. Math., 1963, 15, p. 199—218.

Львовский университет

Поступила в редколлегию 27.09.78

УДК 534.2 : 532

А. А. Лопатьев, А. П. Матковский

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕРМОУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ НА КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН ОТ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЬ — ТВЕРДОЕ ТЕЛО

Отражение плоских гармонических волн на границе раздела жидкость — твердое тело рассматривалось до настоящего времени в основном без учета поглощения волн. Однако в реальных условиях распространяющиеся волны затухают, что вызывается различными факторами, одним из которых является превращение части механической энергии в тепловую. Оказывается, что при определенных условиях термоупругое рассеяние может значительно влиять на отраженную волну. В настоящей работе на основе взаимосвязанных уравнений термоупругости изучено отражение плоских гармонических термоупругих волн на границе раздела жидкость — твердое тело. Приведены условия, при которых термоупругое рассеяние оказывает существенное влияние на отраженную волну, а также обычные условия.

Рассмотрим отражение плоских гармонических волн от границы раздела двух полупространств — жидкости и твердого тела. В дальнейшем и в твердом теле и в жидкости будем учитывать явление термоупругого рассеяния механической энергии.

Движение термоупругого твердого тела описываем исходя из уравнений [5, 3]

$$\mu\Delta\vec{u}_1 + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u}_1 + \alpha_T(3\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,(T - T_0) = \rho_1\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2};$$

$$\Delta T - \frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\gamma_1}{\varkappa_1}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\,\vec{u}_1 = 0.$$