

Пример 3. Эллиптическая трещина:  $L(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ . Поэтому  $A = -1$ ;  $B = 0$ ;  $C = a^{-2}$ ;  $D = b^{-2}$ ;

$$y = -\frac{b^2 \cos \alpha}{\sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}}; \quad x = \frac{a^2 \sin \alpha}{\sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}};$$

$$\Pi = \frac{4}{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}.$$

При  $q = 0$  имеем  $\beta_1 = \gamma_2 = 0$ . Определяя по формулам (11)  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и используя формулы (17), получаем

$$k_1 = \frac{N_3 b \sqrt{\pi}}{E(k) \sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}}; \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2};$$

$$k_2 = \frac{k^2 b \sqrt{\pi}}{\sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}} \left( \frac{N_1 \sin \alpha}{(k^2 - \nu) E(k) + \nu k'^2 F(k)} - \frac{N_2 \cos \alpha}{(k^2 + \nu k'^2) E(k) - \nu k'^2 F(k)} \right);$$

$$k_3 = \frac{(1 - \nu) k^2 b \sqrt{\pi}}{\sqrt{b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha}} \left( \frac{N_1 \cos \alpha}{(k^2 - \nu) E(k) + \nu k'^2 F(k)} + \frac{N_2 \sin \alpha}{(k^2 + \nu k'^2) E(k) - \nu k'^2 F(k)} \right),$$

где  $E(k)$  и  $F(k)$  — полные эллиптические интегралы.

1. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. — М.: Наука, 1974. — 455 с.
2. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
3. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
4. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1968. — 246 с.
5. Shah R. C., Kobayashi A. S. On the parabolic crack in an elastic solid. — Eng. Frac. Mech., 1968, 1; N 2, p. 309—325.

Институт прикладных проблем механики  
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
29.09.78

УДК 539.3

И. С. Костенко

#### К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ УСИЛИЙ И МОМЕНТОВ В ОКРЕСТНОСТЯХ ВЕРШИН ТРЕЩИН В ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассмотрим замкнутую цилиндрическую оболочку с периодической системой параллельных прямолинейных трещин, центры которых расположены вдоль одной окружности:  $\alpha = 0$  ( $\alpha$  — отнесенная к радиусу оболочки координата). Предположим, что оболочка находится под действием внешней нагрузки, которая в идентичной оболочке без трещин вызывает осесимметричное напряженное состояние, а к противоположным берегам трещин приложены равные по величине и противоположно направленные усилия и моменты. Напряженно-деформированное состояние такой оболочки будет циклически симметричным, и в дальнейшем будем рассматривать цилиндрическую панель  $|\beta| \leq \frac{\pi}{k}$  с трещиной  $|\alpha| \leq \alpha_0$ ,  $\beta = 0$  ( $\alpha_0 = l/R$ ;  $l$  — глубина трещины;  $\beta$  — отнесенная к  $R$  координата вдоль направляющей).

При определении напряженного состояния такой оболочки будем исходить из уравнений общей моментной теории [1], записанных в комплексной форме [3]. Воспользуемся, как и в случае технической теории оболочек

[4], методом дисторсий с применением аппарата обобщенных функций, задачу об определении напряженного состояния в оболочке свеем к решению системы сингулярных интегральных уравнений:

$$\sum_{i=1}^2 \int_{-1}^1 F_i(u) \left\{ \frac{a_{ij}}{u-s} + k\alpha_0 K_{ij} [\alpha_0(s-u)] \right\} du = 2\pi f_i(s), \quad |s| < 1 \quad (i = 1, 2)$$

где

$$F_1(u) = \frac{d}{du} \varepsilon(u); \quad F_2(u) = -c \frac{d}{du} \kappa(u);$$

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{R} (v^+ - v^-); \quad \kappa(u) = \theta_2^+ - \theta_2^-;$$

$$f_1(s) = -\frac{N_2^0}{Eh}; \quad f_2(s) = -\frac{M_2^0}{REhc};$$

$$a_{11} = 1; \quad a_{12} = a_{21} = -c(1-\nu); \quad a_{22} = 3 - 2\nu - \nu^2; \quad s = \alpha/\alpha_0.$$

Ядра системы имеют вид

$$K_{11}(z) = -\frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{kz}{2} + \frac{1}{kz} - \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{kz}{2} \left( 1 - \frac{kz}{\operatorname{sh} kz} \right) +$$

$$+ (1 - e^{-b|z|} \cos bz) \operatorname{sgn} z + K_{11}^0(z);$$

$$K_{22}(z) = -\frac{a_{22}}{2} \operatorname{cth} \frac{kz}{2} + \frac{a_{22}}{kz} + \frac{w^2}{2} \operatorname{cth} \frac{kz}{2} \left( 1 - \frac{kz}{\operatorname{sh} kz} \right) -$$

$$- \nu^2 (1 - e^{-b|z|} \cos bz) \operatorname{sgn} z + K_{22}^0(z);$$

$$K_{12}(z) = K_{21}(z) = -\frac{a_{12}}{2} \operatorname{cth} \frac{kz}{2} + \frac{a_{12}}{kz} + \frac{a_{12}}{2} \operatorname{cth} \frac{kz}{2} \left( 1 - \frac{kz}{\operatorname{sh} kz} \right) +$$

$$+ \nu e^{-b|z|} \sin bz - K_{12}^0(z);$$

$$K_{11}^0(z) = c_0 \left\{ u_1(z) \left[ \left( \frac{1}{2a^2} - 2 \right) u_2(z) + \frac{1}{2a^2 b^2} u_3(z) \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2a^2} \operatorname{sgn} z - e^{-|z|} (z - 2 \operatorname{sgn} z) \right\} + S_{11}(z);$$

$$S_{11}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^2 \omega_1(z) [B_{jn}^{(1)} \omega_2(z) + B_{jn}^{(2)} \omega_3(z)] - \omega_4(z) [knz - 2 \operatorname{sgn} z] \right\};$$

$$K_{22}^0(z) = c_0 \left\{ u_1(z) \left[ \left( \frac{2(b^4 + w)}{a^2} - 4w \right) u_2(z) + \frac{\nu 2b^2}{a^2} u_3(z) \right] - \frac{2(b^4 + w)}{a^2} \operatorname{sgn} z + \right.$$

$$\left. + 4w e^{-|z|} \operatorname{sgn} z \right\} + \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^2 \omega_1(z) [Q_{jn}^{(3)} \omega_3(z) + Q_{jn}^{(4)} \omega_2(z)] + 4w \omega_4(z) \operatorname{sgn} z \right\} -$$

$$- w^2 S_{11}(z);$$

$$K_{12}^0(z) = c_0 \left\{ u_1(z) \left[ u_2(z) \frac{2b^4 + w}{2a^2 b^2} + \left( \frac{w}{2a^2} - 2\nu \right) u_3(z) \right] - \frac{2b^4 + w}{2a^2 b^2} \operatorname{sgn} z - \right.$$

$$\left. - \frac{w}{2b^2} e^{-|z|} z \right\} + \sum_{n=m}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^2 \omega_1(z) [Q_{jn}^{(1)} \omega_3(z) + Q_{jn}^{(2)} \omega_2(z)] - \frac{w}{2b^2} \omega_4(z) knz \right\},$$

где  $c_0 = 1$  при  $k = 1$ ;  $c_0 = 0$  при  $k > 1$ ;  $m = 2$  при  $k = 1$ ;  $m = 1$  при  $k > 1$ ;

$$u_1(z) = e^{-\sqrt{a+1}|z|}; \quad u_2(z) = \operatorname{sgn} z \cos \sqrt{a-1}z; \quad u_3(z) = \sin \sqrt{a-1}z;$$

$$\omega_1(z) = e^{-knb|z|}; \quad \omega_2(z) = \sin a_{jn} knz; \quad \omega_3(z) = \operatorname{sgn} z \cos a_{jn} knz; \quad \omega_4(z) = e^{-kn|z|};$$

$$B_{jn}^{(1)} = \left\{ N_{jn}^{(2)} - \frac{(-1)^{j+1}}{2b^2} P_{jn}^{(2)} \right\} / X_{jn}; \quad B_{jn}^{(2)} = \left\{ N_{jn}^{(1)} + \frac{(-1)^{j+1}}{2b^2} P_{jn}^{(1)} \right\} / X_{jn};$$

$$Q_{jn}^{(1)} = \left\{ (-1)^{j+2} [\nu N_{jn}^{(2)} - P_{jn}^{(1)}] - \frac{w}{2b^2} P_{jn}^{(2)} \right\} / X_{jn};$$

$$\begin{aligned}
Q_{jn}^{(2)} &= \left\{ (-1)^{j+1} [vN_{jn}^{(1)} - P_{jn}^{(2)}] - \frac{\omega}{2b^2} P_{jn}^{(1)} \right\} / X_{jn}; \\
Q_{jn}^{(3)} &= \left\{ 2(1-v) [N_{jn}^{(1)} - P_{jn}^{(2)}] + (-1)^{j+1} \frac{2b^2}{k^2 n^2} P_{jn}^{(1)} \right\} / X_{jn}; \\
Q_{jn}^{(4)} &= \left\{ 2(1-v) [N_{jn}^{(2)} - P_{jn}^{(1)}] - (-1)^{j+1} \frac{2b^2}{k^2 n^2} P_{jn}^{(2)} \right\} / X_{jn}; \\
N_{jn}^{(1)} &= l_{jn} b_{jn} (b_{jn}^2 - 3a_{jn}^2) - a_{jn} g_{jn} (a_{jn}^2 - 3b_{jn}^2); \\
N_{jn}^{(2)} &= l_{jn} a_{jn} (3b_{jn}^2 - a_{jn}^2) + b_{jn} g_{jn} (3a_{jn}^2 - b_{jn}^2); \\
P_{jn}^{(1)} &= a_{jn} l_{jn} - b_{jn} g_{jn}; \quad P_{jn}^{(2)} = l_{jn} b_{jn} + g_{jn} a_{jn}; \\
X_{jn} &= g_{jn}^2 + l_{jn}^2; \quad l_{jn} = b_{jn} r_{jn} + a_{jn} s_{jn}; \\
g_{jn} &= a_{jn} r_{jn} - b_{jn} s_{jn}; \quad r_{jn} = 1 + a_{jn}^2 - b_{jn}^2; \\
s_{jn} &= 2a_{jn} b_{jn} + (-1)^j \frac{b^2}{k^2 n^2}; \quad a_{jn} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{R_{jn} - H_{jn}}; \\
b_{jn} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{R_{jn} + H_{jn}}; \quad R_{jn} = \sqrt{H_{jn}^2 + E_{jn}^2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{jn} &= (-1)^{j+1} 2s_{1n} + q_{1n}; \quad H_{jn} = (-1)^{j+1} q_{2n} + 1; \quad q_{1n} = \frac{b}{kn} \sqrt{d_n + s_n}; \\
q_{2n} &= \frac{b}{kn} \sqrt{d_n - s_n}; \quad d_n = \sqrt{1 + s_n^2}; \quad \omega = 1 - v; \quad s_n = s_{1n} - \frac{1}{2b^2}; \\
s_{1n} &= \frac{b^2}{2k^2 n^2}; \quad a = \sqrt{1 + b^4}; \quad 2b^2 = R/d; \quad d = h/\sqrt{3(1-v^2)}; \quad c = 1/2b^2;
\end{aligned}$$

$h$  — полутолщина оболочки;  $E$  — модуль Юнга;  $v$  — коэффициент Пуассона. Функции  $K_{11}(z)$ ,  $K_{12}(z)$ ,  $K_{22}(z)$  непрерывны для всего множества действительных значений  $s$  и  $u$ .

В предположении, что  $N_2^0$  и  $M_2^0$  постоянны, решение исходной системы представим в виде [2]

$$F_i(u) = -\frac{N_2^0}{Eh} \frac{\varphi^{(i)}(u)}{\sqrt{1-u^2}},$$

где

$$\begin{aligned}
\varphi^{(i)}(u) &= \sum_{j=1}^{n/2} A_{2j-1}^{(i)} T_{2j-1}(u); \quad A_{2j-1}^{(i)} = \frac{4}{n} \sum_{v=1}^{n/2} \varphi_v^{(i)} \cos(2j-1)\theta_v; \\
\theta_v &= \frac{2v-1}{2n} \pi; \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Функции  $\varphi_v^{(i)}$  определяем из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
\sum_{v=1}^{n/2} \alpha_{mv} \varphi_v^{(1)} + \sum_{v=1}^{n/2} \beta_{mv} \varphi_v^{(2)} &= 1; \\
\sum_{v=1}^{n/2} \beta_{mv} \varphi_v^{(1)} + \sum_{v=1}^{n/2} \bar{\alpha}_{mv} \varphi_v^{(2)} &= k^* \quad (m = \overline{1, n/2}),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_{mv} &= \frac{1}{2n} \{a_{11} \psi_{mv} + k\alpha_0 [K_{11}(z_1) - K_{11}(z_2)]\}; \\
\beta_{mv} &= \frac{1}{2n} \{a_{12} \psi_{mv} + k\alpha_0 [K_{12}(z_1) - K_{12}(z_2)]\}; \\
\bar{\alpha}_{mv} &= \frac{1}{2n} \{a_{22} \psi_{mv} + k\alpha_0 [K_{22}(z_1) - K_{22}(z_2)]\};
\end{aligned}$$

$$\psi_{mv} = \frac{1}{\sin \theta_m} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{\theta_m \mp \theta_v}{2} + \operatorname{tg} \frac{\theta_m \mp \theta_v}{2} \right\};$$

$$z_i = \alpha_0 (\cos \theta_m + (-1)^i \cos \theta_v); \quad i = 1, 2; \quad k^* = \frac{2b^2}{R} \frac{M_2^0}{N_2^0}.$$

Знак «минус» берется, когда  $|m - v|$  нечетно, а «плюс» — когда оно четно.

Для определения коэффициентов интенсивности усилий  $N_2 (K_1)$  и моментов  $M_2 (K_3)$  получаем формулы

$$K_1 = N_2^0 \frac{\sqrt{l}}{2} \sum_{j=1}^{n/2} (A_{2j-1}^{(1)} + a_{12} A_{2j-1}^{(2)}); \quad K_3 = N_2^0 \frac{\sqrt{l}}{2} R c \sum_{j=1}^{n/2} (a_{12} A_{2j-1}^{(1)} + a_{22} A_{2j-1}^{(2)}).$$

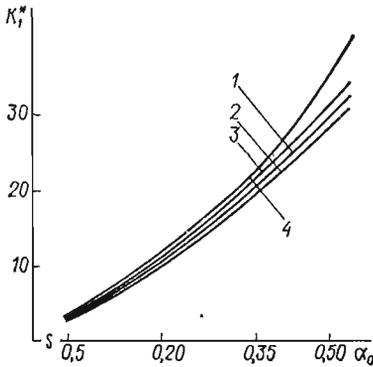


Рис. 1

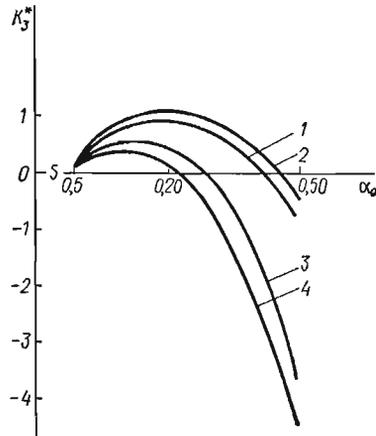


Рис. 2

На ЭВМ «Минск-32» был проведен численный анализ задачи при  $R = 150$  мм;  $h = 1,5$  мм;  $\nu = 0,3$ ;  $k = 1; 5; 9; 11$ .

На рис. 1, 2 показано изменение коэффициентов интенсивности  $K_j^* = K_j/N_2^0$  ( $j = 1, 3$ ) в зависимости от длины трещин и их количества. Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям  $k = 1; 5; 9; 11$ . Как видно из графиков, при фиксированной длине трещин изменение коэффициентов интенсивности с увеличением числа трещин носит немонотонный характер.

1. Власов В. З. Избранные труды.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.— Т. 1. 528 с.
2. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости.— М.: Наука, 1973.— 304 с.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек.— Л.: Судпромгиз, 1962.— 430 с.
4. Осадчук В. А., Ярмошук И. С. Упругое равновесие замкнутой цилиндрической оболочки с системой периодически расположенных параллельных трещин.— В кн.: Физико-механические поля в деформируемых средах. Киев: Наук. думка, 1978, с. 51—58.

Институт прикладных проблем механики  
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
30.06.78

УДК 533.6.013.42

Я. С. Подстригач, А. П. Поддубняк, В. В. Пороховский

#### АНАЛИЗ ПЕРЕИЗЛУЧЕННОГО СИГНАЛА ОТ УПРУГОЙ СФЕРЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НАПРАВЛЕННОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Задача рассеяния сферической волны на упругой сфере в воде изучена в работе [8]. При этом полагалось, что источник генерирования звука излучает энергию в телесный угол  $4\pi$ . Предположим, что в акустической среде