УДК 539.377

М. В. Хай

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ПЛОСКИМИ ТРЕЩИНАМИ, КОНТУР КОТОРЫХ ОПИСЫВАЕТСЯ КРИВОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть бесконечное тело, ослабленное плоской в плане термоизолированной трещиной, контур которой описывается кривой второго порядка, находится под действием однородного теплового потока, перпендикулярного к плоскости расположения трещины, и постоянных растягивающих и сдвигающих внешних усилий, заданных на бесконечности. Наличие в теле трещины приводит к возмущению температурного поля и напряжений, которые концентрируются в основном в некоторой окрестности трещины. Задача об определении этого температурного поля и напряжений сводится к решению двумерных интегральных уравнений [2, 3]

$$\Delta \iint_S \frac{\gamma(\xi,\eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = q_0, \quad (x, y) \in S \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad q_0 = \frac{q}{\lambda_t}\right);$$

$$\Delta \iint_S \frac{\alpha_1(\xi,\eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} - \nu \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \left[\alpha_1(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_2(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial x}\right] \times$$

$$\times \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} - \alpha_0 \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\gamma(\xi,\eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} =$$

$$= \frac{1-\nu}{G} N_1, \qquad (x, y) \in S; \tag{1}$$

$$\Delta \iint_S \frac{\alpha_2(\xi,\eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} + \nu \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \left[\alpha_1(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial y} - \alpha_2(\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial x}\right] \times$$

$$\times \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} - \alpha_0 \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \frac{\gamma(\xi,\eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = \frac{1-\nu}{G} N_2,$$

$$(x, y) \in S;$$

$$\Delta \iint_S \frac{\alpha_3(\xi,\eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = \frac{1-\nu}{G} N_3, \qquad (x, y) \in S,$$

где q — интенсивность теплового потока; λ_t, ν и G — соответственно коэффициен теплопроводности тела, коэффициент Пуассона и модуль сдвига; N_3 — растягивающие, N_1 и N_2 — сдвигающие внешние усилия; $\alpha_0 = \alpha_t(1+\nu)$, α_t — коэффициент линейного теплового расширения; $\gamma(\xi, \eta)$ и $\alpha_j(\xi, \eta)$ $(j = 1, 2, 3)$ — неизвестные функции, характеризующие соответственно интенсивность тепловых диполей и скачок смещений точек поверхностей трещин, имитирующих трещину; S — область, занятая трещиной.

Интегро-дифференциальные уравнения (1) с использованием специальной функции $\mu(\xi, \eta, x, y)$ можно свести к интегральным уравнениям второго рода [2]. Однако вид этой функции известен лишь для круговой области и области, имеющей вид полуплоскости. Поэтому предлагается иной способ решения уравнений (1), который не использует функции $\mu(\xi, \eta, x, y)$.

С этой целью представим γ в виде

$$\gamma(x, y) = A_0\sqrt{-L(x, y)}, \tag{2}$$

где $L(x, y) = A + Bx + Cx^2 + Dy^2 = 0$ — уравнение кривой второго порядка, ограничивающей область S; A, B, C и D — постоянные величины, характеризующие вид кривой; A_0 — неизвестная постоянная. Предположим, что $L(x, y) < 0$ для $(x, y) \in S$ и $L(x, y) > 0$ для $(x, y) \in S^*$ — области, дополняющей S до полной плоскости.

Для определения A_0 подставим выражение (2) в первое уравнение (1) и заменой $\xi = x + \rho\cos\varphi$, $\eta = y + \rho\sin\varphi$ преобразуем его к виду

$$A_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0(\varphi)} \sqrt{-L(x+\rho\cos\varphi,\ y+\rho\sin\varphi)}\,\frac{d\rho}{\rho^2} = q_0, \qquad (x, y) \in S, \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} R_0(\varphi) = (-M + |\sqrt{M^2 - 4QL}|)/2Q; \\ M = B\cos\varphi + 2(Cx\cos\varphi + Dy\sin\varphi); \\ Q = C\cos^2\varphi + D\sin^2\varphi. \end{gathered} \tag{4}$$

В дальнейшем будем предполагать, что постоянные C и D такие, что $Q \geqslant 0$, причем $Q = 0$ лишь для конечного числа значений φ. Это ограничение исключает из рассмотрения плоские трещины, контур которых ограничен гиперболой или двумя пересекающимися прямыми. Без этих ограничений первое уравнение (1) не приводится к уравнению (3).

Используя результаты работы [1] для вычисления интеграла (3), для эллиптической области получаем

$$A_0 \int_0^{\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{(\xi - Z)^2}\, d\xi = q_0, \qquad (x, y) \in S,$$

где

$$Z = \frac{M}{|\sqrt{M^2 - 4QL}|}. \tag{5}$$

Проводя дальнейшие вычисления, находим

$$A_0 = \frac{-q_0}{\pi \int_0^{\pi} |\sqrt{Q}|\, d\varphi}. \tag{6}$$

Интегро-дифференциальные уравнения (1) с учетом соотношений (2) и (6) преобразуем к виду

$$\begin{gathered} \iint_S \alpha_1(\xi, \eta)\left[\frac{1+\nu}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} - \frac{3\nu(y-\eta)^2}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{5/2}}\right] d\xi d\eta + \\ + 3\nu \iint_S \alpha_2(\xi, \eta)\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{5/2}}\, d\xi d\eta = \frac{1-\nu}{G} N_1 + \alpha_0 (C_1 + B_1 x); \\ \iint_S \alpha_2(\xi, \eta)\left[\frac{1+\nu}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} - \frac{3\nu(x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{5/2}}\right] d\xi d\eta + \\ + 3\nu \iint_S \alpha_1(\xi, \eta)\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{5/2}}\, d\xi d\eta = \frac{1-\nu}{G} N_2 + \alpha_0 y D_2; \\ \iint_S \frac{\alpha_3(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{3/2}} = \frac{1-\nu}{G} N_3, \qquad (x, y) \in S, \end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered} C_1 = \frac{A_0 B I_{20}}{2}; \quad B_1 = A_0 C I_{20}; \quad D_2 = A_0 D I_{02}; \\ I_{ij} = -\pi \int_0^{\pi} \frac{\cos^i\varphi \sin^j\varphi}{|\sqrt{Q}|}\, d\varphi \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, n). \end{gathered} \tag{8}$$

Для решения уравнений (7) представим неизвестные функции $\alpha_j(x, y)$ в виде

$$\alpha_j(x, y) = [\beta_j(1 - \delta_{j2})x + \gamma_j(1 - \delta_{j3})y + \omega_j]\sqrt{-L(x, y)} \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Здесь β_j, γ_j и ω_j — неизвестные постоянные; δ_{ij} — символ Кронекера. Степень полинома в выражении (9) необходимо выбрать такой же, какая степень полинома, стоящего в правой части интегральных уравнений (7).

Подставляя (9) в (7) и проводя замену переменных интегрирования, получаем

$$\int_0^\pi |\sqrt{Q}| \left\{ \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \left[\frac{(\beta_1 \cos\varphi + \gamma_1 \sin\varphi)(1+\nu-3\nu\sin^2\varphi) + 3\nu(\beta_2\cos\varphi + \gamma_2\sin\varphi)}{2Q(\xi - Z)(|\sqrt{M^2-4QL}|)^{-1}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(\beta_1 x + \gamma_1 y + \omega_1)(1+\nu-3\nu\sin^2\varphi) + 3\nu(\beta_2 x + \gamma_2 y + \omega_2)}{(\xi - Z)^2} \right] d\xi \right\} d\varphi =$$
$$= \frac{1-\nu}{G} N_1 + \alpha_0 (C_1 + B_1 x); \quad (10)$$
$$\int_0^\pi |\sqrt{Q}| \left\{ \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-\xi^2} \left[\frac{(\beta_2 \cos\varphi + \gamma_2 \sin\varphi)(1+\nu-3\nu\cos^2\varphi) + 3\nu(\beta_1\cos\varphi + \gamma_1\sin\varphi)}{2Q(\xi - Z)(|\sqrt{M^2-4QL}|)^{-1}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(\beta_2 x + \gamma_2 y + \omega_2)(1+\nu-3\nu\cos^2\varphi) + 3\nu(\beta_1 x + \gamma_1 y + \omega_1)}{(\xi - Z)^2} \right] d\xi \right\} d\varphi =$$
$$= \frac{1-\nu}{G} N_2 + \alpha_0 D_2 y;$$
$$\int_0^\pi |\sqrt{Q}| \left[\int_{-1}^{+1} \frac{\omega_3 \sqrt{1-\xi^2}}{(\xi - Z)^2} d\xi \right] d\varphi = \frac{1-\nu}{G} N_3, \quad (x, y) \in S,$$

где Z определяется формулой (5).

Учитывая, что интегралы в (10) по переменной ξ можно вычислить с использованием теории интегралов типа Коши, легко убедиться в том, что в левых частях степень переменных x и y не превышает степени переменных, входящих в правые части (10). Приравнивая выражения при одинаковых степенях x и y, получаем систему алгебраических уравнений для определения β_j, γ_j и ω_j ($j = 1, 2, 3$). Решая эту систему, находим

$$\gamma_1 = \beta_2 = 0; \quad \omega_3 = \frac{(1-\nu) N_3}{G J_{00}}; \quad \omega_0 = \frac{(1-\nu) N_2}{G[(1+\nu) J_{00} - 3\nu J_{20}]};$$
$$\omega_1 = \frac{2C_1^* - B[(1+\nu) I_{20} - 3\nu I_{22}]\beta_1 - 3\nu B I_{22}\gamma_2}{2[(1+\nu) J_{00} - 3\nu J_{20}]};$$
$$\beta_1 = \{\alpha_0 B_1 [(1+\nu)(J_{00} + D I_{02}) - 3\nu(J_{20} + D I_{22})] - 3\alpha_0 \nu C D_2 I_{22}\} W^{-1};$$
$$\gamma_2 = \{-3\alpha_0 \nu B_1 D I_{22} + \alpha_0 D_2 [(1+\nu)(J_{00} + C I_{20}) - 3\nu(J_{02} + C I_{22})]\} W^{-1};$$
$$W = [(1+\nu)(J_{00} + C I_{20}) - 3\nu(J_{02} + C I_{22})][(1+\nu)(J_{00} + D I_{02}) -$$
$$- 3\nu(J_{20} + D I_{22})] - 9\nu^2 C D I_{22}^2; \quad (11)$$
$$C_1^* = \alpha_0 C_1 + (1-\nu) N_1 G^{-1}; \quad J_{ij} = -\pi \int_0^\pi |\sqrt{Q}| \cos^i\varphi \sin^j\varphi d\varphi.$$

В формулах (11) I_{ij} определяется соотношениями (8).

Математические трудности при решении задач термоупругости для тел с трещинами состоят не только в решении интегральных уравнений задачи, но и в определении напряжений вне области трещин. Изложенный выше метод решения интегральных уравнений (7) позволяет довольно легко вычислить коэффициенты интенсивности напряжений, которые характеризуют устойчивость тела по отношению к распространению в нем трещины и определяются по формулам [4]

$$k_1 = \lim_{r\to 0} \sqrt{2\pi r}\, \sigma_{zz}; \quad k_2 = \lim_{r\to 0} \sqrt{2\pi r}\, \sigma_n; \quad k_3 = \lim_{r\to 0} \sqrt{2\pi r}\, \sigma_\tau, \quad (12)$$

где σ_n и σ_τ — соответственно нормальная и тангенциальная по отношению к контуру трещины компоненты напряжений сдвига; r — расстояние произвольной точки P контура трещины от точек тела, находящихся в плоскости, перпендикулярной к касательной к контуру в точке P.

Напряжения σ_n и σ_τ определяются через компоненты напряжений сдвига τ_{xz} и τ_{yz} по формулам

$$\sigma_n = \tau_{xz} \sin\alpha - \tau_{yz} \cos\alpha; \quad \sigma_\tau = \tau_{yz} \sin\alpha + \tau_{xz} \cos\alpha, \tag{13}$$

причем α — угол касательной к контуру трещины, составленный с положительным направлением оси Ox. За положительное направление касательной к контуру трещины выберем то, при движении по которому область, занятая трещиной, остается слева по отношению к направлению движения. Угол α при движении по контуру трещины меняется непрерывно в пределах $[0, 2\pi]$.

Используя формулы для выражения компонент напряжений через скачок смещений $\alpha_i(\xi, \eta)$ поверхностей трещин и проводя замену переменных интегрирования, при вычислении двойных интегралов убеждаемся в том, что компоненты напряжений вне области трещины имеют вид левых частей равенств (10), если в последних изменить пределы интегрирования по φ и учесть, что $(x, y) \in S^*$. Вычисляя в полученных выражениях интегралы по переменной ξ ($|Z| > 1$ для $(x, y) \in S^*$), находим

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} &= -\frac{\pi G}{2(1-\nu)\sqrt{L(x, y)}} \int\limits_{\alpha_1(x, y)}^{\alpha_2(x, y)} |M| \left[(1 + \nu - 3\nu \sin^2\varphi)(\beta_1 x + \omega_1) + \right. \\
&\quad \left. + 3\nu(\gamma_2 y + \omega_2)\cos\varphi \sin\varphi\right] d\varphi + O(L); \\
\tau_{yz} &= -\frac{\pi G}{2(1-\nu)\sqrt{L(x, y)}} \int\limits_{\alpha_1(x, y)}^{\alpha_2(x, y)} |M| \left[(1 + \nu - 3\nu \cos^2\varphi)(\gamma_2 y + \omega_2) + \right. \\
&\quad \left. + 3\nu(\beta_1 x + \omega_1)\cos\varphi \sin\varphi\right] d\varphi + O(L);
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{\pi G}{2(1-\nu)\sqrt{L(x, y)}} \int\limits_{\alpha_1(x, y)}^{\alpha_2(x, y)} |M| \omega_3 d\varphi + O(L).$$

Здесь $\alpha_1(x, y)$ и $\alpha_2(x, y)$ — углы, составленные касательными к контуру трещины, которые выходят из точки с координатами $(x, y) \in S^*$ с положительным направлением оси Ox, причем отсчет этих углов ведется по направлению движения часовой стрелки. Если точка с координатами $(x, y) \in S^*$ находится на контуре трещины, то $\alpha_1(x, y) = \alpha(x, y)$; $\alpha_2(x, y) = \alpha(x, y) + \pi$, где

$$\alpha(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{B + 2Cx}{-2Dy} + k\pi. \tag{15}$$

Под $\operatorname{arctg} x$ подразумевается главное его значение, т. е. значение угла $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arctg} x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Число k, равное 0, 1 или 2, необходимо выбрать таким, чтобы при изменении x, y вдоль контура трещины угол $\alpha(x, y)$ менялся непрерывно.

Отметим также, что для точек, находящихся вне трещины, $M < 0$. Поэтому $|M| = -M$. Это создает большие удобства при вычислении коэффициентов интенсивности напряжений.

Учитывая, что

$$\lim_{r\to 0} \sqrt{\frac{2\pi r}{L(x, y)}} = \left.\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt[4]{\Pi}}\right|_{x, y \in L}; \quad \Pi = (B + 2Cx)^2 + 4D^2y^2; \tag{16}$$

$$2Dy = -\Pi^{1/2}\cos\alpha; \quad B + 2Cx = \Pi^{1/2}\sin\alpha,$$

выражения для коэффициентов интенсивности напряжений с использованием формул (14), (13) и (16) представим в виде

$$k_1 = -\frac{G\pi\sqrt{2\pi}}{1-\nu}\Pi^{1/4}\omega_3; \tag{17}$$

$$k_2 = -\frac{G\pi\sqrt{2\pi}}{1-\nu}\Pi^{1/4}[(\beta_1 x + \omega_1)\sin\alpha - (\gamma_2 y + \omega_2)\cos\alpha];$$

$$k_3 = -G\pi\sqrt{2\pi}\,\Pi^{1/4}[(\beta_1 x + \omega_1)\cos\alpha + (\gamma_2 y + \omega_2)\sin\alpha].$$

В формулах (17) переменные x и y связаны между собой уравнением контура трещины и определяются через угол касательной к контуру трещины с положительным направлением оси Ox по формулам

$$x = -\frac{B}{2C} + \frac{\sin\alpha}{2C}\Pi^{1/2}; \quad y = -\frac{\cos\alpha}{2D}\Pi^{1/2}; \quad \Pi = \frac{D(B^2-4AC)}{C\cos^2\alpha + D\sin^2\alpha}. \tag{18}$$

При выводе формул (18) предполагалось, что C и D не равны нулю. При $C = 0$ и $D \neq 0$ необходимо по формулам (18) воспользоваться лишь выражением для y, а затем из уравнения контура трещины определить x. Соответствующим образом необходимо поступать в случае, когда $D = 0$, $C \neq 0$.

Пример 1. Полосовидная трещина. В этом случае $L(x, y) = x^2 - a^2$. Поэтому $B = D = 0$; $A = -a^2$; $C = 1$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $(x > 0)$; $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ $(x < 0)$. Коэффициенты γ_2, β_1 и ω_i $(i = 1, 2, 3)$, определяемые формулами (11), имеют вид

$$\gamma_2 = 0; \quad \beta_1 = -\frac{\alpha_0\dot{q}_0}{4\pi}; \quad \omega_i = -\frac{(1-\nu)N_i}{2\pi G}(i = 1, 3); \quad \omega_2 = -\frac{N_2}{2\pi G}.$$

Полагая в (17) $x = \pm a$ и учитывая выражения для коэффициентов, получаем

$$k_2(\pm a) = \sqrt{\pi a}\left(N_2 \pm \frac{\alpha_0 G q_0}{2(1-\nu)}a\right); \quad k_i(\pm a) = \sqrt{\pi a}\,N_i \quad (i = 1, 3). \tag{19}$$

Формулы (19) совпадают с известными в литературе, полученными методами теории функций комплексного переменного в плоских и антиплоских задачах теории упругости.

Пример 2. Параболическая трещина: $L(x, y) = y^2 - px$. Для рассматриваемой задачи $A = C = 0$; $D = 1$; $B = -p$; $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{p}{y} + \pi$ для $y \geqslant 0$; $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{p}{y} + 2\pi$ для $y \leqslant 0$. Поэтому

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_0 q_0}{2\pi(1-\nu)}; \quad \gamma_2 = \frac{\beta_1}{2}; \quad \omega_i = -\frac{(1-\nu)N_i}{2\pi G} \qquad (i = 2, 3);$$

$$\omega_1 = -\frac{N_1}{2\pi G} - \frac{\nu p\beta_1}{4(1-\nu)}; \quad x = \frac{p}{4}\operatorname{ctg}^2\alpha; \quad y = \frac{p}{2}\operatorname{ctg}\alpha; \quad \Pi = \frac{p^2}{\sin^2\alpha}.$$

Выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в рассматриваемом случае имеют вид

$$k_1 = \sqrt{\frac{\pi p}{-2\sin\alpha}}N_3;$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{\pi p}{-2\sin\alpha}}\left(\frac{N_1\sin\alpha}{1-\nu} - N_2\cos\alpha\right) - \frac{G\nu p q_0\pi\alpha_0}{4(1-\nu)^3}\sqrt{-\frac{p\sin\alpha}{2}}; \tag{20}$$

$$k_3 = \sqrt{\frac{\pi p}{-2\sin\alpha}}(N_1\cos\alpha + (1-\nu)N_2\sin\alpha) - \frac{Gpq_0\pi\alpha_0}{4(1-\nu)} \times$$

$$\times\left(\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\nu\cos\alpha}{1-\nu}\right)\sqrt{\frac{p}{-2\sin\alpha}}.$$

При $N_2 = N_1 = 0$ формулы (20) совпадают с полученными другим методом в работе [5].

Пример 3. Эллиптическая трещина: $L(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. Поэтому $A = -1$; $B = 0$; $C = a^{-2}$; $D = b^{-2}$;

$$y = -\frac{b^2 \cos\alpha}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}; \quad x = \frac{a^2\sin\alpha}{\sqrt{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}};$$

$$\Pi = \frac{4}{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}.$$

При $q = 0$ имеем $\beta_1 = \gamma_2 = 0$. Определяя по формулам (11) ω_i ($i = 1, 2, 3$) и используя формулы (17), получаем

$$k_1 = \frac{N_3 b\sqrt{\pi}}{E(k)\sqrt[4]{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}; \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2};$$

$$k_2 = \frac{k^2 b\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}\left(\frac{N_1\sin\alpha}{(k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 F(k)} - \frac{N_2\cos\alpha}{(k^2 + \nu k'^2)E(k) - \nu k'^2 F(k)}\right);$$

$$k_3 = \frac{(1-\nu)k^2 b\sqrt{\pi}}{\sqrt[4]{b^2\cos^2\alpha + a^2\sin^2\alpha}}\left(\frac{N_1\cos\alpha}{(k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 F(k)} + \frac{N_2\sin\alpha}{(k^2 + \nu k'^2)E(k) - \nu k'^2 F(k)}\right),$$

где $E(k)$ и $F(k)$ — полные эллиптические интегралы.

1. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М.: Наука, 1974.— 455 с.
2. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.
3. *Кит Г. С., Хай М. В.* Интегральные уравнения пространственных задач термоупругости для тел с трещинами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 12, с. 1108—1112.
4. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами.— Киев: Наук. думка, 1968.— 246 с.
5. *Shah R. C., Kobayashi A. S.* On the parabolic crack in an elastic solid.— Eng. Frac. Mech., 1968, 1, N 2, p. 309—325.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
29.09.78

УДК 539.3

И. С. Костенко

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ УСИЛИЙ И МОМЕНТОВ В ОКРЕСТНОСТЯХ ВЕРШИН ТРЕЩИН В ЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Рассмотрим замкнутую цилиндрическую оболочку с периодической системой параллельных прямолинейных трещин, центры которых расположены вдоль одной окружности: $\alpha = 0$ (α — отнесенная к радиусу оболочки координата). Предположим, что оболочка находится под действием внешней нагрузки, которая в идентичной оболочке без трещин вызывает осесимметричное напряженное состояние, а к противоположным берегам трещин приложены равные по величине и противоположно направленные усилия и моменты. Напряженно-деформированное состояние такой оболочки будет циклически симметричным, и в дальнейшем будем рассматривать цилиндрическую панель $|\beta| \leqslant \frac{\pi}{k}$ с трещиной $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $\beta = 0$ ($\alpha_0 = l/R$; l — полудлина трещины; β — отнесенная к R координата вдоль направляющей).

При определении напряженного состояния такой оболочки будем исходить из уравнений общей моментной теории [1], записанных в комплексной форме [3]. Воспользовавшись, как и в случае технической теории оболочек