

матричное представление которого

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix},$$

то

$$\frac{[B_1 \tilde{v}, \tilde{v}]}{[A_1 \tilde{v}, \tilde{v}]} = \frac{[\mathcal{P}B\tilde{v}, \tilde{v}]}{[\mathcal{P}A\tilde{v}, \tilde{v}]} = \frac{[B\tilde{v}, \mathcal{P}\tilde{v}]}{[A\tilde{v}, \mathcal{P}\tilde{v}]} = \frac{[B\tilde{v}, \tilde{v}]}{[A\tilde{v}, \tilde{v}]}.$$

Поэтому вместо соотношения (7) имеем

$$\omega_k = \max_{M_k} \min_{\tilde{v} \in M_k} \frac{[B\tilde{v}, \tilde{v}]}{[A\tilde{v}, \tilde{v}]},$$

что и доказывает требуемое утверждение.

Из леммы 2 и теоремы 14 работы [2] следует основная теорема.

**Теорема.** Если на гироскопическую систему (1) наложены идеальные связи (2), то частоты связанной гироскопической системы разделяют старые в том смысле, что  $\omega_k \leq \omega'_k \leq \omega_{k+2(n-m)}$  ( $k = 1, 2m$ ).

1. *Балинский А. И.* Поведение частот гироскопических систем. — *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1978, вып. 7, с. 20—21.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — 2-е изд. — М.: Наука, 1966. — 289 с.
3. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ. — М.: Наука, 1969. — 279 с.
4. *Duffin R. J.* A minimax theory for overdamped networks. — *J. Rat. Mech. Anal.*, 1955, 4, N 2, p. 221—233.
5. *Duffin R. J.* The Rayleigh-Ritz method for dissipative or gyroscopic systems. — *Quart. Appl. Math.*, 1960, 18, N 3, p. 215—221.

Институт прикладных проблем механики  
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
16.11.78

УДК 539.377

Г. С. Кит, М. В. Хай

**О ПРИМЕНЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ  
К РЕШЕНИЮ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ  
ДЛЯ ТЕЛА С ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНОЙ**

Пусть бесконечное упругое тело с плоской трещиной, область  $S$  которой ограничена контуром  $L$ , нагревается нестационарным температурным полем

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = F(x_1, x_2, x_3, t) + \frac{\partial}{\partial x_3} F^*(x_1, x_2, x_3, t); \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, t) \\ F^*(x_1, x_2, x_3, t) \end{aligned} \right\} = \int_0^t \frac{dt_0}{8a_i^3 (\sqrt{\pi(t-t_0)})^3} \iint_S \left\{ \begin{aligned} \mu(\xi, \eta, t_0) \\ \gamma(\xi, \eta, t_0) \end{aligned} \right\} e^{-\frac{R^2}{4a_i^2(t-t_0)}} d\xi d\eta,$$

где  $t$  — время;  $x_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) — декартовы координаты произвольной точки тела в системе координат  $Ox_1x_2x_3$  с началом в области  $S$  и с координатной плоскостью  $x_1Ox_2$ , совпадающей с плоскостью расположения трещины. Противоположным поверхностям  $S^\pm$  трещины соответствуют значения  $x_3 = \pm 0$ .

В формулах (1)  $R = [(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2 + x_3^2]^{1/2}$ ,  $\mu(\xi, \eta, t_0)$  и  $\gamma(\xi, \eta, t_0)$  — плотности тепловых потенциалов, которые в общем случае определяются из интегральных уравнений, получаемых после удовлетворения граничным условиям задачи теплопроводности на поверхностях трещины;  $a_i$  — коэффициент температуропроводности тела.

Формулами (1) определяется убывающее на бесконечности нестационарное температурное поле при начальном условии  $T(x_1, x_2, x_3, 0) = 0$  [1]. Функции  $\mu$  и  $\gamma$  имеют вполне определенный физический смысл. Их зависимость от значений температуры  $T^\pm$  и тепловых потоков  $q^\pm$  на противоположных поверхностях  $S^\pm$  трещины определяется равенствами

$$\gamma(x_1, x_2, t) = (T^- - T^+) a_t^2, \quad \mu(x_1, x_2, t) = -\frac{(q^+ + q^-) a_t^2}{\lambda_t}, \quad (2)$$

где  $\lambda_t$  — коэффициент теплопроводности тела.

Если на поверхностях  $S^\pm$  трещины задано значение температуры  $T^\pm$ , то  $\gamma(x_1, x_2, t)$  определяется выражением (2), а для определения  $\mu(\xi, \eta, t)$  имеем интегральное уравнение

$$\int_0^t \frac{dt_0}{8a_t^3 (\sqrt{\pi(t-t_0)})^3} \iint_S \mu(\xi, \eta, t_0) e^{-\frac{(x_1-\xi)^2+(x_2-\eta)^2}{4a_t^2(t-t_0)}} d\xi d\eta = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad (x_1, x_2) \in S.$$

В случае задания на поверхностях трещины значений теплового потока  $q^\pm$  функция  $\mu(x_1, x_2, t)$  имеет вид (2), а  $\gamma(\xi, \eta, t)$  определяется из интегро-дифференциального уравнения

$$\left( \Delta_{12} - \frac{1}{a_t^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \int_0^t \frac{dt_0}{8a_t^3 (\sqrt{\pi(t-t_0)})^3} \iint_S \gamma(\xi, \eta, t_0) e^{-\frac{(x_1-\xi)^2+(x_2-\eta)^2}{4a_t^2(t-t_0)}} d\xi d\eta = \\ = \frac{q^- - q^+}{2\lambda_t}, \quad (x_1, x_2) \in S,$$

где  $\Delta_{12}$  — двумерный оператор Лапласа по переменным  $x_1$  и  $x_2$ .

Аналогичные интегро-дифференциальные уравнения можно получить и в случае, когда на поверхностях трещины задано условие теплопроницаемости [2].

В дальнейшем плотности тепловых потенциалов считаем известными.

Задачу термоупругости решаем в квазистатической постановке. Легко убедиться, что если температурное поле определяется формулами (1), то решение уравнений термоупругости в перемещениях можно представить в виде

$$u_i = 4(1-\nu)(\psi_i - \delta_{i3}M) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \psi + \psi_0 - \alpha_0^* \int_0^t T dt \right); \\ \psi = x_3(\psi_3 - 2M) - (1-2\nu) \int_{x_3}^{\infty} \psi_3 dx_3; \quad M = \int_{x_3}^{\infty} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \right) dx_3, \quad (3)$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $\alpha_0^* = a_t^2 \alpha_t (1+\nu)/(1-\nu)$ ,  $\alpha_t$  — коэффициент линейного теплового расширения;  $\psi_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) — произвольные гармонические функции;  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — компоненты вектора перемещений.

Учитывая зависимость компонент напряжений от деформаций и температуры, получаем их выражения через функции  $\psi_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3$ ) и  $T(x_1, x_2, x_3, t)$ :

$$\frac{\tau_{i3}}{2G} = (2 - \delta_{i3}) \frac{\partial \psi_i}{\partial x_3} + (-1)^i 2\nu(1 - \delta_{i3}) \frac{\partial W}{\partial x_{3-t}} + x_3 \frac{\partial^2 (2M - \psi_3)}{\partial x_i \partial x_3} - \\ - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_3} \left( \psi_0 - \alpha_0^* \int_0^t T dt \right) - \delta_{i3} \alpha_0^* a_t^{-2} T; \quad W = \int_{x_3}^{\infty} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \right) dx_3. \quad (4)$$

Здесь  $G$  — модуль сдвига;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Из выражений (3), (4) и граничных условий задачи термоупругости можно сделать некоторые заключения о виде функций  $\psi_i$ . В частности, если на поверхностях трещины заданы лишь нормальные внешние усилия  $N_3^\pm$  ( $N_3^+ = N_3^-$ ) и  $T = F(x_1, x_2, x_3, t)$ , то  $u_3 = 0$  для  $(x_1, x_2) \in S^*$  — области, дополняющей  $S$  до полной плоскости, а  $\tau_{13} = \tau_{23} = 0$  во всей плоскости. Для выполнения этих условий представим  $\psi_0$  в виде суммы  $\psi_0 = \psi_{01} + \psi_{02}$  и положим  $\psi_{02} = F^* = \psi_1 = \psi_2 = 0$ ,

$$\psi_3 = \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_S \frac{\alpha_3(\xi, \eta, t)}{R} d\xi d\eta, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \psi_{01} - \alpha_0^* \int_0^t F dt \right)_{x_3=0} = 0, \quad (5)$$

где  $\alpha_3(\xi, \eta, t)$  — неизвестная плотность потенциала двойного слоя.

В случае, когда на поверхностях трещины заданы касательные усилия  $N_i^\pm$  ( $N_i^+ = N_i^-$ ) ( $i = 1, 2$ ), а температура  $T = \frac{\partial}{\partial x_3} F^*(x_1, x_2, x_3, t)$ , то  $u_1 = u_2 = 0$  в области  $S^*$ , а  $\sigma_{zz} = 0$  в  $S \cup S^*$ . Эти условия будут удовлетворены, если положить  $\psi_{01} = \psi_3 = F = 0$ ,

$$\psi_i = \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_S \frac{\alpha_i(\xi, \eta, t)}{R} d\xi d\eta \quad (i = 1, 2);$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left( \int_{x_3}^{\infty} \psi_{02} dx_3 + \alpha_0^* \int_0^t F^* dt \right)_{x_3=0} = 0. \quad (6)$$

Здесь  $\alpha_i(\xi, \eta, t)$  — произвольные плотности потенциалов.

Если на поверхностях трещины заданы как нормальные, так и касательные внешние самоуравновешенные усилия, а температура  $T$  описывается функцией (1), то функции  $\psi_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) необходимо выбрать в виде (5) и (6). Плотности  $\alpha_i$  характеризуют скачок смещений точек противоположных поверхностей трещины и равны нулю на ее контуре.

Для выбора гармонических функций  $\psi_{0i}$  воспользуемся равенствами (5) и (6). Легко убедиться, что эти равенства будут выполняться тождественно, если положить

$$\psi_{01} = \iint_S \frac{\omega_1(\xi, \eta, t)}{R} d\xi d\eta; \quad \psi_{02} = \frac{\partial}{\partial x_3} \iint_S \frac{\omega_2(\xi, \eta, t)}{R} d\xi d\eta, \quad (7)$$

где

$$\omega_1(\xi, \eta, t) = \frac{\alpha_0^*}{4a_i^2 \pi} \int_0^t \mu(\xi, \eta, t) dt; \quad \omega_2(\xi, \eta, t) = \frac{\alpha_0^*}{4a_i^2 \pi} \int_0^t \gamma(\xi, \eta, t) dt. \quad (8)$$

На основании изложенного выше компоненты тензора напряжений определим через плотности тепловых потенциалов и скачки смещений точек противоположных поверхностей трещин по формулам

$$\frac{\sigma_{i3}}{2G} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x_3^2} - (-1)^i \nu (1 - \delta_{i3}) \frac{\partial \Omega}{\partial x_{3-i}} - x_3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_3} \right] -$$

$$- \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_3} \left( \Phi_1 - \alpha_0^* \int_0^t F dt \right) - \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_3^2} \left( \Phi_2 - \alpha_0^* \int_0^t F^* dt \right) -$$

$$- \alpha_0^* a_i^{-2} \left( F + \frac{\partial F^*}{\partial x_3} \right) \delta_{i3} \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\frac{\sigma_{i2}}{2G} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} [(1-2\nu)\Psi_3 + x_3\Phi] + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_2} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_1} \right) \right\} - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[ \Phi_1 + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_3} - \alpha_0^* \int_0^t \left( F + \frac{\partial F^*}{\partial x_3} \right) dt \right];$$

$$\frac{\sigma_{ii}}{2G} = \frac{1}{2(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ 2\nu\Phi + 2(1-\nu) \frac{\partial\Psi_i}{\partial x_i} \right] - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} [x_3\Phi + (1-2\nu)\Psi_3] \right\} - \quad (9)$$

$$- \alpha_0^* a_i^{-2} \left( F + \frac{\partial F^*}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[ \Phi_1 + \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3} - \alpha_0^* \int_0^t \left( F + \frac{\partial F^*}{\partial x_3} \right) dt \right] \quad (i = 1, 2);$$

$$\Phi = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial\Psi_k}{\partial x_k}; \quad \Omega = \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial x_1};$$

где

$$\Psi_j = \iint_S \frac{\alpha_j(\xi, \eta, t)}{R} d\xi d\eta; \quad \Phi_j = \iint_S \frac{\omega_j(\xi, \eta, t)}{R} d\xi d\eta,$$

причем  $\omega_j$  определяется через  $\gamma$  и  $\mu$  формулами (8), а  $F$  и  $F^*$  — формулами (1).

Удовлетворяя граничным условиям на поверхностях трещины, получаем интегро-дифференциальные уравнения для определения функций  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ):

$$\Delta_{12} \iint_S \frac{\alpha_i(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2}} + (-1)^i \nu (1 - \delta_{i3}) \iint_S \left[ \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \times$$

$$\times \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2}} = 2(1-\nu) \left[ \frac{N_i}{2G} - \frac{\alpha_0^*}{a_i^2} \left( F + \frac{\partial F^*}{\partial x_3} \right) \delta_{i3} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_3} \left( \Phi_1 - \alpha_0^* \int_0^t F dt \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_3^2} \left( \Phi_2 - \alpha_0^* \int_0^t F^* dt \right) \right]_{x_3=0},$$

$$(x_1, x_2) \in S \quad (i = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Из интегральных уравнений (10) следует, что в случае нестационарных задач для определения  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) необходимо предварительно знать плотности тепловых потенциалов. Известно, что в стационарном случае, когда на трещине задана температура, при определении функции  $\alpha_3(\xi, \eta)$  нет необходимости в решении задачи теплопроводности. Для нестационарных задач это свойство не имеет места.

В качестве примера рассмотрим случай, когда на поверхностях дискообразной трещины, свободной от внешних усилий, задан тепловой поток  $q(x_1, x_2)$ , направленный в разные стороны. Тогда из условий симметрии следует, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , а для определения  $\alpha_3$  необходимо решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\Delta_{12} \iint_S \frac{\alpha_3(\xi, \eta, t) d\xi d\eta}{\sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2}} = B_0 f(x_1, x_2, t), \quad (x_1, x_2) \in S, \quad (11)$$

где  $B_0 = 4a_i^4 \alpha_i (1 + \nu) / \lambda_i$ ;

$$f(x_1, x_2, t) = - \frac{\Delta_{12}}{2a_i^2 \pi \sqrt{\pi}} \int_0^t dt_0 \int_0^{\frac{1}{2a_i \sqrt{t_0}}} d\tau \iint_S q(\xi, \eta) \exp \{ -\tau^2 [(x_1 - \xi)^2 + (x_2 - \eta)^2] \} d\xi d\eta.$$

Интегральное уравнение (11) решается в замкнутом виде с использованием формулы обращения, приведенной в работе [4].

Располагая функцией  $\alpha_3$ , определяем коэффициент интенсивности напряжений по формуле, приведенной в работе [3]. Для рассматриваемого примера имеем

$$k_1(\varphi, a) = \frac{GB_0}{(1-\nu)\pi\sqrt{a\pi}} \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} f(\xi, \eta, t)}{(\xi - a \cos \varphi)^2 + (\eta - a \sin \varphi)^2} d\xi d\eta.$$

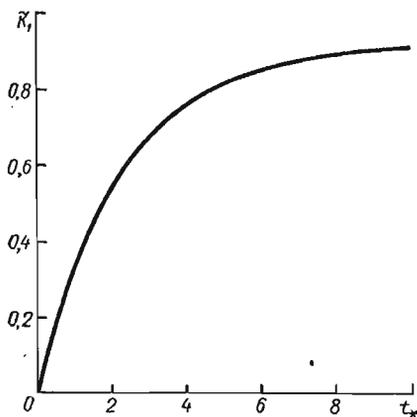
Здесь  $a$  — радиус трещины, занимающей область  $S$ ;  $\varphi$  — угловая координата произвольной точки контура трещины.

В частности, когда  $q(x_1, x_2) = q_0 = \text{const}$ , то

$$k_1 = k_\infty \left[ 1 - \frac{4t_*}{\pi \sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{t_*^2}} + \frac{2t_*^2}{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{t_*}\right) - \frac{4}{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{t_*}\right) + \frac{4}{\pi \sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1} Q_k(t_*)}{k!(4k-3)!(2k-1)(2k+1)} \right],$$

где  $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du$ ;  $k_\infty = E a q_0 \alpha_l \sqrt{a\pi/4} (1-\nu) \lambda_l$ ;  $t_* = \frac{2a_l \sqrt{t}}{a}$ ;

$$Q_k(t_*) = \int_0^{\frac{1}{t_*^2}} (1 + z t_*^2) e^{-z} z^{2k - \frac{3}{2}} dz = \left[ 1 + \left(2k - \frac{1}{2}\right) t_*^2 \right] \gamma\left(2k - \frac{1}{2}, \frac{1}{t_*^2}\right) - \frac{e^{-\frac{1}{t_*^2}}}{t_*^{4k-3}}. \quad (12)$$



В формулах (12)  $\gamma\left(2k - \frac{1}{2}, z\right)$  — неполная гамма-функция, которая для значений  $k = 1, 2, \dots, n$  выражается через экспоненту и интеграл вероятности.

На рисунке построена зависимость  $\tilde{k}_1 = k_1/k_\infty$  от приведенного значения времени  $t_*$ . Из графика видно, что с увеличением времени коэффициент интенсивности напряжений  $k_1$  увеличивается от нуля до значения, соответствующего стационарному случаю. Время, по истечении которого этот коэффициент незначительно отличается от значения  $k_1$  для стационарной задачи, зависит от радиуса дискообразной трещины и коэффициента теплопроводности тела.

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 527 с.
2. Кит Г. С. Деякі питання термоміцності тіл з тріщинами. — Вісн. АН УРСР, 1972, № 4, с. 22—28.
3. Кит Г. С. Общий метод решения пространственных задач теплопроводности и термоупругости для тела с дискообразными трещинами. — Прикл. механика, 1977, 13, № 12, с. 18—24.
4. Кит Г. С., Хай М. В. Интегральные уравнения пространственных задач теплопроводности для тел с трещинами. — Докл. АН УССР. Сер. А, 1975, № 8, с. 704—707.

Институт прикладных проблем механики  
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию  
14.09.78