3. *Иохвидов И. С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы.— М. : Наука, 1974.— 264 с.
4. *Ландер Ф. И.* Безутианта и обращение ганкелевых и теплицевых матриц.— Мат. исслед., 1974, 9, № 2, с. 173—179.

Львовский сельскохозяйственный институт

Поступила в редколлегию 01.11.78

УДК 518:517

О. В. Огирко

НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ПОДСЧЕТА ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Линейным методам приближенного вычисления интегралов посвящен ряд работ (см., например, [2, 4] и библиографию в них).

В данной работе предлагается нелинейный метод приближенного подсчета определенных интегралов с помощью ветвящихся цепных дробей [1]. Метод базируется на улучшении сходимости последовательности интегральных сумм с применением преобразования Шенкса и прямого метода решения системы линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями.

Постановка задачи. Рассмотрим интеграл вида $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $f(x) \in C[a, b]$, который вычисляем по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx L(f), \quad L(f) = \sum_{0}^{m-1} p_k f(x_k), \tag{1}$$

где p_k $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ — заданные весы; $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ $(a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \leqslant b)$ — узлы интегрирования.

Рассмотрим интегральные суммы

$$S_n = \sum_{0}^{n-1} p_k f(x_k), \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx = S. \tag{2}$$

Известно, что скорость сходимости интегральных сумм S_n к интегралу невелика [2]. Например, в методе прямоугольников

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx - \sum_{0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x_k \right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поставим задачу улучшения сходимости: по заданной сходящейся последовательности S_n $(n = 1, 2, \ldots; S_n \to S)$ нужно построить новую последовательность

$$\sigma_n = f_n(S_1, S_2, S_3, \ldots) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

удовлетворяющую условиям: а) σ_n сходится к тому же пределу S, что и S_n; б) сходимость σ_n к S лучше в каком-то смысле сходимости S_n к S.

Представим интегральную сумму S_n в виде

$$S_n = S_n + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \cdots + (S_1 - S_{n-1}).$$

Рассмотрим последовательность

$$\tilde{S}_n = S_n q_0^0 + c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_{n-2} q_{n-2}^n + c_{n-1} q_{n-1}^n, \tag{4}$$

где $c_i = (S_{i+1} - S_i)\,(i = \overline{1, n-2})$; $c_{n-1} = S_1 - S_{n-1}$. Очевидно, что $\tilde{S}_n \to S_n$, когда $q_i \to 1$, $q_i < 1$ $(i = \overline{1, n-1})$.

---

[1] Идея метода принадлежит В. Я. Скоробогатько.

К последовательности $\tilde{S}_n$ можно применить преобразование Шенкса [1]:

$$\sigma_{kn} = \frac{D_{kn}(S_n)}{D_{kn}}, \quad n = k,\ k+1,\ k+2,\ \ldots, \tag{5}$$

где D_{kn} (S_n) — определитель вида

$$D_{kn}(S_n) = \begin{vmatrix} S_{n-k} & S_{n-k+1} & \ldots & S_n \\ \Delta S_{n-k} & \Delta S_{n-k+1} & \ldots & \Delta S_n \\ \Delta S_{n-k+1} & \Delta S_{n-k+2} & \ldots & \Delta S_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta S_{n-1} & \Delta S_n & \ldots & \Delta S_{n+k-1} \end{vmatrix}, \quad \Delta S_n = S_{n+1} - S_n,$$

а D_{kn} получается из D_{kn} (S_n) заменой элементов первой строки единицами.

Условием применимости этого преобразования есть $D_{kn} \neq 0$. Для $k = 1$ преобразование (5) совпадает с преобразованием δ^2 (преобразованием Эйткена).

Применение преобразования Шенкса и прямого метода решения систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями к приближенному подсчету интеграла.

Запишем преобразование (5) в виде

$$\sigma_{kn} = \frac{\begin{vmatrix} S_{n-k} & \Delta S_{n-k} & \Delta S_{n-k+1} & \ldots & \Delta S_{n-1} \\ S_{n-k+1} & \Delta S_{n-k+1} & \Delta S_{n-k+2} & \ldots & \Delta S_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_n & \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \ldots & \Delta S_{n+k-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \Delta S_{n-k} & \Delta S_{n-k+1} & \ldots & \Delta S_{n-1} \\ 1 & \Delta S_{n-k+1} & \Delta S_{n-k+2} & \ldots & \Delta S_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \Delta S_n & \Delta S_{n+1} & \ldots & \Delta S_{n+k-1} \end{vmatrix}}.$$

Из метода Крамера очевидно, что σ_{kn} — первая компонента решения такой системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & \Delta S_{n-k} & \ldots & \Delta S_{n-1} \\ 1 & \Delta S_{n-k+1} & \ldots & \Delta S_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \Delta S_n & \ldots & \Delta S_{n+k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{n-k} \\ S_{n-k+1} \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

т. е. $z_1 = \sigma_{kn}$, а это не что иное как приближенное значение интеграла.

Известно [3], что каждую компоненту решения системы линейных алгебраических уравнений можно представить в виде цепной дроби. Сводим матрицу системы (6) к трехдиагональному виду с помощью элементарных преобразований. Тогда компоненту z_1, используя форму Принсгейма записи цепных дробей, представляем в виде

$$z_1 = \frac{S_{n-k}/\Delta S_{n-k}\,|}{|\,1/\Delta S_{n-k}} - \frac{-\dfrac{\Delta S_{n-k}}{S_{n-k}}/(\Delta S_{n-k+2} - \Delta S_{n-k+1})\,\Big|}{\Big|\left(\Delta S_{n-k+1} - \Delta S_{n-k} - \dfrac{(\Delta S_{n-k})^2}{S_{n-k}}\right)/(\Delta S_{n-k+2} - \Delta S_{n-k+1})} - \ldots \tag{7}$$

Эта формула дает нелинейный метод вычисления интегралов с помощью цепных дробей.

Расписав разности вида ΔS_n, в определителе D_{kn} (S_n) формулы (5) сложим соответственно каждую предыдущую строку с последующей. Получим

$$D_{kn}(S_n)=\begin{vmatrix} S_{n-k} & S_{n-k+1} & \dots & S_n \\ S_{n-k+1} & S_{n-k+2} & \dots & S_{n+1} \\ S_{n-k+2} & S_{n-k+3} & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{n+k} \end{vmatrix}.$$

Определитель D_{kn} представим в виде суммы определителей следующим способом:

$$D_{kn}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ S_{n-k+1} & S_{n-k+2} & \dots & S_{n+1} \\ S_{n-k+2} & S_{n-k+3} & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{n+k} \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} S_{n-k} & S_{n-k+1} & \dots & S_n \\ S_{n-k+1} & S_{n-k+2} & \dots & S_{n+1} \\ S_{n-k+2} & S_{n-k+3} & \dots & S_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогда формула (5) примет вид

$$\sigma_{kn}=\frac{1}{z_1+z_2+\dots+z_{k+1}}, \tag{8}$$

где неизвестные $z_1, z_2, \dots, z_{k+1}$ суть решения такой системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} S_{n-k} & S_{n-k+1} & \dots & S_n \\ S_{n-k+1} & S_{n-k+2} & \dots & S_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n & S_{n+1} & \dots & S_{n+k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Компоненты z_i $(i=\overline{1, k-1})$ — решения системы 9) — представляются в виде цепной дроби с помощью прямого метода решения систем линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями [3]. Все z_i $(i=\overline{1, k+1})$ нелинейно выражаются через S_i $(i=\overline{n-k, n+k})$.

Итак,

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{1}{z_1+z_2+\dots+z_{k+1}}. \tag{10}$$

Подсчет интегралов по формуле (10) существенно не увеличивает количество вычислений, поскольку согласно методу [3] определяется лишь первая компонента z_1, а остальные выражаются простыми операциями на основе элементов первой компоненты.

Оценка погрешности метода. Дадим оценку для функций $f(x)\in W^{(r)}(M;\ a,\ b)$, которые на $[a, b]$ имеют непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка и кусочно-непрерывную производную $f^{(r)}(x)$, $|f^{(r)}(x)|\leqslant M$. Предполагаем, что квадратурная формула (1) точна для всех многочленов степени не выше $(r-1)$.

Для вычисления конкретного интеграла на ЭВМ решаем систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{pmatrix} S_{n-k}+\varepsilon_{n-k} & S_{n-k+1}+\varepsilon_{n-k+1} & \dots & S_n+\varepsilon_n \\ S_{n-k+1}+\varepsilon_{n-k+1} & S_{n-k+2}+\varepsilon_{n-k+2} & \dots & S_{n+1}+\varepsilon_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_n+\varepsilon_n & S_{n+1}+\varepsilon_{n+1} & \dots & S_{n+k}+\varepsilon_{n+k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{k+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

где ε_r $(r=n-k,\ n-k+1,\ \dots,\ n,\ \dots,\ n+k)$ — погрешность, включающая теоретическую погрешность задания интегральных сумм S_r и машинную погрешность.

Теорема. Пусть квадратурная формула (1) точна для многочленов степени $(r-1)$ и рассмотренный нелинейный метод реализуется на ЭВМ в системе с плавающей запятой с t-двоичными разрядами для записи мантиссы чисел. Тогда для любой функции $f(x) \in W^{(r)}(M;\ a,\ b)$ справедливо неравенство

$$\varepsilon \leqslant \frac{(b-a)^{r+1} c_r M}{(n-k)^r} + c_k 2^{-t},$$

где

$$\varepsilon = \left| \int_a^b f(x)\,dx - fl\left(\sum_0^{n-k} p_i f(x_i)\right)\right|,\ \text{а}\ c_r,\ c_k,\ t$$

известны.

Доказательство следует из неравенства

$$\varepsilon = \left| \int_a^b f(x)\,dx - fl\left(\sum_0^{n-k} p_i f(x_i)\right) + \sum_0^{n-k} p_i f(x_i) - \sum_0^{n-k} p_i f(x_i)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_0^{n-k} p_i f(x_i)\right| + \left|\sum_0^{n-k} p_i f(x_i) - fl\left(\sum_0^{n-k} p_i f(x_i)\right)\right|$$

и оценок из работ [4, 5].

Анализ результатов подсчета определенных интегралов нелинейным методом. С помощью программы [1], составленной применительно к ЭВМ «ЕС-10-22», предложенным нелинейным методом вычислены интегралы

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1-2x\cos\lambda + x^2}\,dx \quad (\lambda = 0,\ 1), \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

$$\frac{1}{e}\int_0^1 x^m e^x dx \qquad (m = 1, 2, \ldots, 16),$$

которые подсчитаны и известными линейными методами. Примеры показывают, что кроме вычислительной устойчивости применение ветвящихся цепных дробей позволяет приблизительно в два раза уменьшить количество операций по сравнению с методами прямоугольников, трапеций и Симпсона при заданной точности подсчета интегралов.

1. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы высшей математики.— Минск : Вышэйш. школа, 1975.— Т. 2. 420 с.
2. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа.— М. : Гостехиздат, 1953.— 528 с.
3. *Недашковський М. О., Скоробогатько В. Я.* Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом гіллястих ланцюгових дробів.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь.— К. : Наук. думка, 1977, с. 84—92.
4. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.— М. : Физматгиз, 1974.— 92 с.
5. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений.— М. : Мир, 1970.— 564 с.

Институт прикладных проблем механики
и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
04.05.78

УДК 534

В. С. Заячковский

ПОВЕДЕНИЕ ЧАСТОТ СВЯЗАННЫХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Известно, что если на консервативную механическую систему наложить связи, то ее собственные частоты не уменьшатся (теорема Релея). На возможность обобщения этого результата на случай гироскопической системы впер-

[1] Программа отправлена в Республиканский фонд алгоритмов и программ.