что $G(x) = SF(x)V(x)$. Расписав последнее равенство, получим совпадение матриц $G(x)$ и $F(x)$, что и доказывает теорему.

Определение. Матрицу $G(x)$ будем называть канонической формой матрицы $A(x)$ относительно полускалярно эквивалентных преобразований.

Легко показать, что матрицы $A(x)$ и $B(x)$ с условиями (1) полускалярно эквивалентны тогда и только тогда, когда их канонические формы совпадают.

Следствие. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и $B_1, B_2, \ldots, B_k$ — два набора матриц над P такие, что полиномиальные матрицы $A(x) = Ex^k + A_1x^{k-1} + \ldots + A_k$ и $B(x) = Ex^k + B_1x^{k-1} + \ldots + B_k$ удовлетворяют условиям (1). Тогда эти наборы подобны в том и только в том случае, если канонические формы матриц $A(x)$ и $B(x)$ совпадают.

1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К.: Наук. думка, 1977, с. 61—66.

Институт прикладних проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 19.06.78

УДК 512.83

Ли Гюн-Ы

К ОБРАЩЕНИЮ И ВОССТАНОВЛЕНИЮ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ

Одной из центральных и трудных задач теории матриц является задача отыскания для данной неособенной матрицы обратной к ней. В настоящее время развит ряд специальных способов обращения ганкелевых и теплицевых матриц (см. [3] и библиографию к ней). Один из них состоит в восстановлении обратной матрицы по некоторым наперед определенным двум ее столбцам. Однако при этом возникает ряд случаев, когда обратная матрица однозначно не определяется никакой парой своих столбцов. В работе [1] развит способ восстановления обратной к ганкелевой (и как следствие, к теплицевой) матрице, применимой и в отмеченных выше исключительных случаях. В настоящей работе указанный способ развит в отношении обращения и восстановления теплицевых матриц.

Теплицевой матрицей называется матрица вида

$$T_n = \| c_{i-j} \|_{i,j=0}^{n-1}. \tag{1}$$

Лемма 1. Всякой невырожденной теплицевой матрице $T_n = \| c_{i-j} \|_{i,j=0}^{n-1}$ соответствует хотя бы одна порождающая ее пара многочленов

$$\begin{gathered} f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n; \\ h(\lambda) = b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_n \end{gathered} \tag{2}$$

такая, что

$$T_n = h(A_l)\, I_0^{\mathrm{I}}, \tag{3}$$

где

$$A_l = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad I_0^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} i_0 & 0 & \ldots & 0 \\ i_1 & i_0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ i_{n-1} & i_{n-2} & \ldots & i_0 \end{pmatrix},$$

а числа i_q определяются рекуррентным соотношением

$$i_q + a_1 i_{q-1} + a_2 i_{q-2} + \cdots + a_n i_{q-n} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

причем $i_0 = 1$, $i_q = 0$ при $q < 0$.

Доказательство. Покажем вначале, что правая часть представления (3) есть теплицева матрица. Действительно,

$$h(A_f)\, I_0^{\mathrm{I}} = b_1 A_f^{n-1} I_0^{\mathrm{I}} + b_2 A_f^{n-2} I_0^{\mathrm{I}} + \cdots + b_n I_0^{\mathrm{I}}.$$

Поскольку матрицы

$$A_f^k I_0^{\mathrm{I}} = I_k^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} i_k & \cdots & i_0 & & 0 \\ i_{k+1} & \ddots & & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & & i_0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ i_{k+n-1} & \cdots & i_{k+1} & & i_k \end{bmatrix} \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots)$$

теплицевы, то выражение $h\ (A_f)\ J_0^{\mathrm{I}}$ как линейная комбинация теплицевых матриц является теплицевой матрицей. Покажем, как по заданной матрице T_n определить порождающую ее пару многочленов вида (2).

Запишем формальное разложение

$$\frac{h(\lambda)}{f(\lambda)} = \frac{c_{1-n}}{\lambda} + \frac{c_{2-n}}{\lambda^2} + \cdots + \frac{c_0}{\lambda^n} + \frac{c_1}{\lambda^{n+1}} + \cdots + \frac{c_{n-1}}{\lambda^{2n-1}} + \cdots$$

с коэффициентами c_q ($q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\ (n-1)$), являющимися элементами матрицы T_n. Отсюда получаем рекуррентные соотношения

$$c_q + a_1 c_{q-1} + a_2 c_{q-2} + \cdots + a_n c_{q-n} = \begin{cases} b_{q+n}, & \text{если } 1-n \leqslant q \leqslant 0; \\ 0, & \text{если } \qquad q > 0. \end{cases} \tag{5}$$

Из соотношения (5) при $q = 1, 2, \ldots, n-1$ получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов f:

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_{i-j} a_{j+1} = -c_{i+1} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-2).$$

В силу невырожденности матрицы T_n эта система разрешима. По одному из ее решений a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) запишем многочлен f. Из тех же соотношений (5) при $1 - n \leqslant q \leqslant 0$ определим коэффициенты многочлена h. Определенные так многочлены f и h представляют собой порождающую теплицеву матрицу пару многочленов. Действительно, с учетом разложения

$$\frac{1}{f(\lambda)} = \frac{i_0}{\lambda^n} + \frac{i_1}{\lambda^{n+1}} + \frac{i_2}{\lambda^{n+2}} + \cdots,$$

коэффициенты i_k которого определяются соотношениями (4), имеем

$$\frac{c_{1-n}}{\lambda} + \frac{c_{2-n}}{\lambda^2} + \cdots + \frac{c_0}{\lambda^n} + \frac{c_1}{\lambda^{n+1}} + \cdots = b_1\left(\frac{i_0}{\lambda} + \frac{i_1}{\lambda^2} + \cdots\right) +$$
$$+ b_2\left(\frac{i_0}{\lambda^2} + \frac{i_1}{\lambda^3} + \cdots\right) + \cdots + b_n\left(\frac{i_0}{\lambda^n} + \frac{i_1}{\lambda^{n+1}} + \cdots\right).$$

Отсюда

$$c_{q+1-n} = b_1 i_q + b_2 i_{q-1} + \cdots + b_n i_{q-n} \qquad (q = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

и матрица T_n записывается в виде

$$T_n = b_1 I_{n-1}^{\mathrm{I}} + b_2 I_{n-2}^{\mathrm{I}} + \cdots + b_n I_0^{\mathrm{I}},$$

что окончательно дает

$$T_n = h(A_f)\, I_0^{\mathrm{I}}.$$

Известно, что обратной к невырожденной ганкелевой матрице является безутиантная матрица. Это утверждение получается особенно просто [1], если воспользоваться специальным представлением матрицы безутианты, установленным в работе [2] и имеющим также самостоятельное значение. Рассмотрим соответствующие аналоги для случая теплицевой матрицы.

Пусть

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n; \qquad (n \geqslant m)$$
$$g(\lambda) = d_0\lambda^m + d_1\lambda^{m-1} + \cdots + d_m$$

— заданная пара многочленов, а

$$\hat{f}(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0;$$

$$\hat{g}(\lambda) = d_m\lambda^n + d_{m-1}\lambda^{n+1} + \cdots + d_0\lambda^{n-m}.$$

Лемма 2. Для матрицы, определяемой многочленом от двух переменных

$$D(\lambda, \mu) = [\hat{f}(\lambda)\, g(\mu) - f(\mu)\, \hat{g}(\lambda)]/(1 - \lambda\mu) = \sum_{i,j=0}^{n-1} d_{ij}\lambda^i\mu^j,$$

т. е. $D = \| d_{ij} \|_{i,j=0}^{n-1}$, имеет место следующее представление:

$$D = S_f^{|-1} g(A_f), \tag{6}$$

где A_f — сопровождающая многочлен f матрица вида

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \ldots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}; \quad S_f^{|-1} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Матрица D запишется просто через коэффициенты порождающих ее многочленов f, g, если учесть выражение

$$S_f^{|-1} A_f^k = \begin{pmatrix} 0 & A_{n-k} \\ A_k & 0 \end{pmatrix} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

где

$$A_k = \begin{pmatrix} -a_n & -a_{n-1} & \ldots -a_{n-k+1} \\ 0 & -a_n & \ldots -a_{n-k+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots -a_n \end{pmatrix}; \quad A_{n-k} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-k-1} & a_{n-k-2} & \ldots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Используя представления (3), (6) и непосредственно проверяемое соотношение $S_f^{|-1} = (J_0^1)^{-1}$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Если теплицева матрица (D) невырожденная, то обратной к ней является матрица D (теплицева матрица).

Очевидно, что, как и в случае безутиантной матрицы [4], матрица D, обратная к заданной теплицевой матрице, порождается не единственной парой многочленов. Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. Две пары многочленов f, g ($\neq$ const f) и F, G ($\neq$ const F) порождают одну и ту же матрицу D тогда и только тогда, когда

$$f(\lambda) = \alpha F(\lambda) + \beta G(\lambda); \quad g(\lambda) = \gamma F(\lambda) + \delta G(\lambda),$$

где $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Выберем из множества пар многочленов, порождающих матрицу D в определенном смысле, простейшую пару.

Теорема 2. Пусть в последнем столбце матрицы D некоторый элемент $d_{k,n-1}$ отличен от нуля. Тогда порождающая матрицу $D = \| d_{ij} \|_{i,j=0}^{n-1}$ пара многочленов может быть выбрана в виде

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n;$$
$$g(\lambda) = d_1\lambda^{n-1} + d_2\lambda^{n-2} + \cdots + d_n \tag{8}$$

с произвольным коэффициентом a_{k+1}. Коэффициентами многочлена g являются элементы последнего столбца матрицы D; $d_{k+1} = d_{k,n-1}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.

Доказательство. Пусть

$$F(\lambda) = \tilde{a}_0\lambda^n + \tilde{a}_1\lambda^{n-1} + \cdots + \tilde{a}_n;$$

$$G(\lambda) = \tilde{d}_0\lambda^n + \tilde{d}_1\lambda^{n-1} + \cdots + \tilde{d}_n$$

— некоторая порождающая матрицу D пара многочленов, в которой, очевидно, коэффициенты $\tilde{a}_0$, $\tilde{d}_0$ не могут одновременно равняться нулю в силу условия $\tilde{d}_{k,n-1} \neq 0$.

По лемме 3 пара многочленов вида (8) определяется условиями

$$\alpha\tilde{a}_0 + \beta\tilde{d}_0 = 1;$$

$$\alpha\tilde{a}_{k+1} + \beta\tilde{d}_{k+1} = a_{k+1};$$

$$\gamma\tilde{a}_0 + \delta\tilde{d}_0 = 0;$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Согласно представлению (6) и тому, что $d_{k,n-1} \neq 0$, определитель системы первых двух из этих уравнений отличен от нуля. Имеем

$$\alpha = \frac{\tilde{d}_{k+1} - a_{k+1}\tilde{d}_0}{\tilde{a}_0\tilde{d}_{k+1} - \tilde{a}_{k+1}\tilde{d}_0}; \quad \beta = \frac{\tilde{a}_0 a_{k+1} - \tilde{a}_{k+1}}{\tilde{a}_0\tilde{d}_{k+1} - \tilde{a}_{k+1}\tilde{d}_0}; \quad \gamma = -\tilde{d}_0; \quad \delta = \tilde{a}_0.$$

Очевидно, что для таких значений α, β, γ, δ условие $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ выполняется при произвольных значениях величины a_{k+1}. Условие $d_{k+1} = d_{k,n-1}$ вытекает из представления (6). Теорема 2 доказана.

Будем говорить, что матрица T_n^{-1} восстанавливается по наперед известным элементам некоторых своих столбцов, если по этим элементам можно определить порождающую ее пару многочленов и, следовательно, по формулам (6), (7) получить саму матрицу.

Теорема 3. Пусть в некоторой невырожденной теплицевой матрице $T_n = \| c_{i-j} \|_{i,j=0}^{n-1}$ известны элементы ее произвольного столбца и элементы последнего столбца обратной к ней матрицы $T_n^{-1} = \| d_{ij} \|_{i,j=0}^{n-1}$. Пусть, кроме того, в случае $d_{n-1,n-1} = d_{n-2,n-1} = \ldots = d_{k+1,n-1} = 0$, $d_{k,n-1} \neq 0$, $k \in (0, 1, 2, \ldots, n-1)$, известны элементы $d_{i,n-k}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, $d_{i,n-k-1}$ $(i = k+1, k+2, \ldots, n-1)$ матрицы T_n^{-1}. Тогда по совокупности этих данных матрицы T_n и T_n^{-1} восстанавливаются однозначно. Их восстановление можно осуществить по формулам (3) и (6).

Доказательство. Порождающую пару многочленов для матрицы T_n^{-1} ищем в виде (8). По теореме 2 для коэффициентов многочлена g имеем выражение $d_{i+1} = d_{i,n-1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Полагаем $a_{k+1} = 0$, а остальные коэффициенты многочлена f определяем из системы уравнений, получаемой путем приравнивания значения каждого из заданных элементов матрицы T_n^{-1} к его соответствующему выражению из (6). Эта система уравнений в блочно-матричной записи имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ 0 & \mathcal{D}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Здесь

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} d_{k,n-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{k,n-1} \end{pmatrix}; \quad a^1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}; \quad a^2 = \begin{pmatrix} a_{k+2} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -d_{0,n-1} & 0 & \dots & 0 \\ -d_{1,n-1} & -d_{0,n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & -d_{0,n-1} \\ & & & \vdots \\ -d_{k-2,n-1} & -d_{k-3,n-1} & \dots & -d_{2k-1-n,n-1} \end{bmatrix}; \quad d^1 = \begin{bmatrix} d_{1,n-k} \\ d_{2,n-k} \\ \vdots \\ d_{k,n-k} \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{D}_3 = \begin{pmatrix} -d_{k,n-1} & -d_{k-1,n-1} & \dots & -d_{2k+1-n,n-1} \\ 0 & -d_{k,n-1} & \dots & -d_{2k+2-n,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -d_{k,n-1} \end{pmatrix}; \quad d^2 = \begin{pmatrix} d_{k+1,n-k-1} \\ d_{k+2,n-k-1} \\ \vdots \\ d_{n-1,n-k-1} \end{pmatrix}.$$

Используя формулу (6), по найденным многочленам f, g строим всю матрицу T_n^{-1}.

Для восстановления матрицы T_n образуем систему уравнений путем приравнивания заданных элементов ее k-го столбца к соответствующим их выражениям из (3). Имеем

$$I_k^1 h_0 = C_k,$$

где

$$h_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}; \quad C_k = \begin{pmatrix} c_{-k+1} \\ c_{-k+2} \\ \vdots \\ c_{-k+n} \end{pmatrix}.$$

По найденным многочленам h и f, используя формулы (3), (4), восстанавливаем всю матрицу T_n.

Отметим, что восстановление матрицы T_n осуществляется особенно просто, если предполагать известным не произвольный, а последний ее столбец. В этом случае коэффициенты многочлена h определяются формулами

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_{j-i} c_{i-n} \qquad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где $a_0 = 1$, $a_i = 0$ при $i < 0$.

Следствие. В случае, когда в последнем столбце обратной матрицы T_n^{-1} стоит элемент $d_{n-1,n-1}$ или $d_{0,n-1}$ и $d_{i,n-1}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, коэффициенты многочлена f определяются соответственно формулами

$$a_i = \frac{d_{i0}}{d_{n-1,n-1}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad a_n = 0,$$

$$a_i = -\frac{d_{i-1,n-1}}{d_{0,n-1}} \qquad (i = 2, 3, \dots, n), \quad a_1 = 0.$$

В следующей теореме речь идет о восстановлении матрицы T_n^{-1} по наперед известным двум ее столбцам.

Теорема 4. Пусть T_n — невырожденная теплицева матрица и у матрицы T_n^{-1} элементы $d_{n-1,n-1} = d_{n-2,n-1} = \dots = d_{k+1,n-1} = 0$, $d_{k,n-1} \neq 0$, $d_{k-1,n-1} \neq 0$. Тогда матрица T_n^{-1} восстанавливается по следующей совокупности своих элементов: $d_{i,n-k}$ $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, $d_{i,n-1}$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n-1)$.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, коэффициенты многочлена g определяются выражениями $d_{i+1} = d_{i,n-1}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Коэффициенты многочлена f определим из следующей системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} d_{k,n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & -d_{0,n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & & -d_{1,n-1} & -d_{0,n-1} & \ldots & 0 \\ \cdot & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & d_{k,n-1} & -d_{k-2,n-1} & -d_{k-3,n-1} & \ldots & -d_{2k-n-1,n-1} \\ & & -d_{k-1,n-1} & -d_{k-2,n-1} & \ldots & -d_{2k-n,n-1} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \cdot & -d_{k-2,n-1} \\ 0 & \ldots\ 0 & 0 & & & -d_{k-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_k \\ a_{k+2} \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} d_{1,n-k} \\ d_{2,n-k} \\ d_{3,n-k} \\ \vdots \\ d_{k,n-k} \\ d_{k+1,n-k} \\ \vdots \\ d_{n-2,n-k} \\ d_{n-1,n-k} \end{bmatrix}.$$

Поскольку восстановление обратной к теплицевой матрицы сводится, по существу, к нахождению порождающей ее пары многочленов, укажем еще один способ определения такой пары.

Теорема 5. Теплицева матрица $T_n = \| c_{i-j} \|_{i,j=0}^{n-1}$ обратима тогда и только тогда, когда каждая из систем уравнений

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_{i-j} x_j = -c_{i+1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-2); \tag{10}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} c_{i-j} y_j = \delta_{i,n-1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{11}$$

разрешима. Определенные по решениям систем (10), (11) многочлены f и g $(a_{j+1} = x_j,\ d_{j+1} = y_j)$ образуют порождающую пару многочленов для матрицы T_n^{-1}.

Доказательство. Когда матрица T_n обратима, разрешимость систем (10), (11) очевидна.

Пусть, наоборот, системы (10) и (11) разрешимы. Допустим, что $\det T_n = 0$. Тогда между строками $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{n-1}$ (нумерация сверху вниз) матрицы T_n существует линейная зависимость. Покажем, что при этом последняя ее строка должна линейно выражаться через предыдущие.

Обозначим через m наибольшее значение номера строки, линейно выражающейся через предыдущие строки, т. е.

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \Gamma_i = 0, \quad \alpha_m \neq 0. \tag{12}$$

Пусть $m < n - 1$. В силу разрешимости системы (10) для некоторого ее решения $x_j = a_{j+1}$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) имеем

$$0 = \alpha_m \left(\sum_{j=0}^{n-1} c_{m-j} a_{j+1} + c_{m+1}\right) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \left(\sum_{j=0}^{n-1} c_{i-j} a_{j+1} + c_{i+1}\right) =$$

$$= \alpha_m \sum_{j=0}^{n-1} c_{m-j} a_{j+1} + \alpha_m c_{m+1} + \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i c_{i-j} + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i c_{i+1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} \left(\alpha_m c_{m-j} + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i c_{i-j}\right) + \alpha_m c_{m+1} + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i c_{i+1} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} \sum_{i=0}^{m} \alpha_i c_{i-j} + \sum_{i=0}^{m} \alpha_i c_{i+1}.$$

С учетом соотношения (12) отсюда получаем

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i c_{i+1} = 0.$$

Объединяя полученное выражение с (12), окончательно получаем

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \Gamma_{i+1} = 0,$$

что противоречит выбору числа m. Таким образом, имеем $m = n - 1$, т. е. последняя строка матрицы T_n линейно выражается через предыдущие. А это в свою очередь противоречит разрешимости системы (11), в которой все элементы правой части, кроме последнего, равны нулю. Таким образом, $\det T_n \neq 0$ и матрица T_n обратима.

Утверждение о том, что определенные по решениям систем (10), (11) многочлены f, g образуют порождающую пару для матрицы T_n^{-1}, следует из леммы 1 и теоремы 2.

Замечание. Разрешимость какой-либо одной из систем (10), (11) недостаточна для обратимости матрицы T_n.

Действительно, пусть

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица T_3 — особенная, а система, соответствующая (10):

$$x_0 + x_2 = 0,$$
$$x_1 = 0$$

разрешима. С другой стороны, возьмем особенную матрицу

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае соответствующая (11) система

$$y_0 = 0,$$
$$y_0 + y_1 = 0$$

разрешима.

1. *Балинский А. И., Ли Гюн-Ы.* Об обращении ганкелевых и теплицевых матриц.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 31—37.
2. *Балинский А. И.* Некоторые способы исследования обобщенных задач на собственные значения : Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Львов, 1972.— 113 с.

3. *Иохвидов И. С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы.— М. : Наука, 1974.— 264 с.
4. *Ландер Ф. И.* Безутианта и обращение ганкелевых и теплицевых матриц.— Мат. исслед., 1974, 9, № 2, с. 173—179.

Львовский сельскохозяйственный институт

Поступила в редколлегию 01.11. 78

УДК 518 : 517

О. В. Огирко

НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ПОДСЧЕТА ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Линейным методам приближенного вычисления интегралов посвящен ряд работ (см., например, [2, 4] и библиографию в них).

В данной работе предлагается нелинейный метод приближенного подсчета определенных интегралов с помощью ветвящихся цепных дробей [1]. Метод базируется на улучшении сходимости последовательности интегральных сумм с применением преобразования Шенкса и прямого метода решения системы линейных алгебраических уравнений ветвящимися цепными дробями.

Постановка задачи. Рассмотрим интеграл вида $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, где $f(x) \in C[a, b]$, который вычисляем по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx L(f), \quad L(f) = \sum_{0}^{m-1} p_k f(x_k), \tag{1}$$

где p_k $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ — заданные весы; $x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}$ $(a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} \leqslant b)$ — узлы интегрирования.

Рассмотрим интегральные суммы

$$S_n = \sum_{0}^{n-1} p_k f(x_k), \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_a^b f(x)\,dx = S. \tag{2}$$

Известно, что скорость сходимости интегральных сумм S_n к интегралу невелика [2]. Например, в методе прямоугольников

$$\left| \int\limits_a^b f(x)\,dx - \sum_{0}^{n-1} f(x_k)\,\Delta x_k \right| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Поставим задачу улучшения сходимости: по заданной сходящейся последовательности S_n $(n = 1, 2, \ldots; S_n \to S)$ нужно построить новую последовательность

$$\sigma_n = f_n(S_1, S_2, S_3, \ldots) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

удовлетворяющую условиям: а) σ_n сходится к тому же пределу S, что и S_n; б) сходимость σ_n к S лучше в каком-то смысле сходимости S_n к S.

Представим интегральную сумму S_n в виде

$$S_n = S_n + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \cdots + (S_1 - S_{n-1}).$$

Рассмотрим последовательность

$$\tilde{S}_n = S_n q_0^0 + c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots + c_{n-2} q_{n-2}^n + c_{n-1} q_{n-1}^n, \tag{4}$$

где $c_i = (S_{i+1} - S_i)(i = \overline{1, n-2})$; $c_{n-1} = S_1 - S_{n-1}$. Очевидно, что $\tilde{S}_n \to S_n$, когда $q_i \to 1$, $q_i < 1$ $(i = \overline{1, n-1})$.

[1] Идея метода принадлежит В. Я. Скоробогатько.