ется граничным для (D, D_0), если существует ортопроектор $P \in B(\mathfrak{H})$ такой, что $W = PW^0$, где $(\mathfrak{H}, W^0)$ — граничная пара для (D, D_0).

Лемма 3. Для того чтобы оператор $W \in B(D, \mathfrak{H})$ был граничным для (D, D_0), необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) оператор W нормально разрешим; 2) $Z(W) \supset D_0$); 3) $\dim [Z(W) \ominus D_0] = \operatorname{codim} R(W)$.

Доказательство. Необходимость условий «1—3» очевидна. Покажем их достаточность. В силу условия «3» существует биекция $A : Z(W) \ominus D_0 \to \mathfrak{H} \ominus R(W)$. Положим $W^0y = Ay$; $y \in Z(W) \ominus D_0$; $W^0y = Wy$; $y \in D \ominus (Z(W) \ominus D_0)$. Ясно, что $W = PW^0$, где P — ортопроектор: $\mathfrak{H} \to R(W)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть D, D_0, $\mathfrak{H}$ — такие, как в определении 2, причем $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$; $W_i \in B(D, \mathfrak{H}_i)$, $i = 1, 2$. Если $W = (W_1, W_2)$ — граничный оператор для (D, D_0), то при всяком $C \in B(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ $\tilde{W} = (W_1, W_2 - CW_1)$ — граничный оператор для (D, D_0).

Справедливость этого утверждения следует из леммы 3 и из того, что операторы $\tilde{W}$ и W отличаются множителем, имеющим в матричной записи вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -C & 1 \end{pmatrix}$, т. е. оператором, являющимся корректно обратимым при всех $C \in B(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$.

Теорема 2. Если выполняются все условия леммы 4, то существует $C \in B(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ такое, что пара $(W_1, W_2 - CW_1)$ независима.

Доказательство. Пусть W_1^{-1} — оператор, обратный к $W_1 \setminus D \ominus Z(W_1)$; $A = W_1(Z(W_1) + Z(W_2))$; $K = R(W_1) \ominus A$; $M = W_1^{-1}K$; P_K — ортопроектор: $\mathfrak{H}_1 \to K$. Так как оператор W_1 нормально разрешим, что следует из леммы 3, то в силу теоремы Банаха об обратном операторе [3] $W_1^{-1} \in B(R(W_1), D)$. Положим $C = W_2W_1^{-1}P_K$. Ясно, что $C \in B(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ и что $Z(W_2 - CW_1) = Z(W_2) + M$. Отсюда и из пункта «б» леммы 1 следует независимость операторов W_1 и $W_2 - CW_1$. Теорема доказана.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1968.— 496 с.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 17.10.78

УДК 512.8

О. М. Мельник

К ПОЛУСКАЛЯРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Рассмотрим полиномиальные $n \times n$-матрицы над кольцом $P[x]$, где P — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики.

Полиномиальные матрицы $A(x)$ и $B(x)$ называют полускалярно эквивалентными [1], если существуют числовая неособенная матрица Q над P и обратимая полиномиальная матрица $R(x)$ над $P[x]$ такие, что

$$A(x) = QB(x)R(x).$$

Пусть $A(x)$ — неособенная $n \times n$-матрица, удовлетворяющая условиям:

$$1.\ \Delta(x) = \det A(x) = (x - \alpha)^h, \quad h \geqslant n + 2;$$

$$2.\ \operatorname{rang} A(\alpha) = n - 1; \qquad (1)$$
$$3.\ A(x) = (Ex - L)\,N(x).$$

Без ограничения общности будем считать, что $\alpha = 0$.

Теорема 1. В классе матриц, полускалярно эквивалентных матрице $A(x)$, существует матрица вида

$$G(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ g_1(x) & g_2(x) & \dots & g_{n-1}(x) & x^h \end{Vmatrix}, \qquad (2)$$

где

$$g_i(x) = x^i + \sum_{j=1}^{h-n-1} a_{ij}x^{n+j}, \quad a_{ij} \in P, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Доказательство проведем методом математической индукции. Используя теорему 1 работы [1], полускалярно эквивалентными преобразованиями приведем матрицу $A(x)$ к виду

$$U(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ x + \sum\limits_{j=0}^{h-n-1} c_{1j}x^{n+j} & x^2 + \sum\limits_{j=0}^{h-n-1} c_{2j}x^{n+j} & \dots & x^{n-1} + \sum\limits_{j=0}^{h-n-1} c_{n-1,j}x^{n+j} & x^h \end{Vmatrix}. \qquad (3)$$

Пусть $c_{n-1,0} \neq 0$. Умножим матрицу $U(x)$ слева на матрицу C, а справа — на матрицу $R(x)$, где

$$C = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & c_{n-1,0} \\ -c_{n-1,0} & 1 & & & 0 & 0 \\ & -c_{n-1,0} & \ddots & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & -c_{n-1,0} & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

и

$$R(x) = \begin{Vmatrix} r_{11}(x) & r_{12}(x) & \dots & r_{1,n-1}(x) & r_{1n}(x) \\ c_{n-1,0}r_{11}(x) & c_{n-1,0}r_{12}(x) + 1 & \dots & c_{n-1,0}r_{1,n-1}(x) & c_{n-1,0}r_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,0}^{n-2}r_{11}(x) & c_{n-1,0}^{n-3}(c_{n-1,0}r_{12}(x) + 1) & \dots & c_{n-1,0}^{n-2}r_{1,n-1}(x) & c_{n-1,0}^{n-2}r_{1,n}(x) \\ r_{n1}(x) & r_{n2}(x) & \dots & r_{n,n-1}(x) & r_{nn}(x) \end{Vmatrix}.$$

Элементы матрицы $R(x)$ однозначно определяются равенствами

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} c_{n-1,0}^{i}\left(x^i + \sum_{j=0}^{h-n-1} c_{ij}x^{n+j}\right)\right) r_{11}(x) + c_{n-1,0}x^h r_{n1}(x) = 1;$$

$$r_{1n}(x) = -c_{n-1,0}x^h;$$

$$r_{nn}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} c_{n-1,0}^{i}\left(x^i + \sum_{j=0}^{h-n-1} c_{ij}x^{n+j}\right);$$

$$r_{1\beta}(x) = -r_{11}(x)\sum_{i=\beta}^{n-1} c_{n-1,0}^{1+i-\beta}\left(x^i + \sum_{j=0}^{h-n-1} c_{ij}x^{n+j}\right);$$

$$r_{n\beta}(x) = -r_{n1}(x)\sum_{i=\beta}^{n-1} c_{n-1,0}^{1+i-\beta}\left(x^i + \sum_{j=0}^{h-n-1} c_{ij}x^{n+j}\right),$$

$$\beta = 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1.$$

Матрица, полученная приведением матрицы $CU(x)\,R(x)$ к виду (3), в последней строке и $n-1$-м столбце содержит полином

$$-r_{11}(x)\left(\sum_{l=1}^{n-1} c_{n-1,0}^{l}\left(x^l + \sum_{j=0}^{h-n-1} c_{lj}x^{n+j}\right)\right)\left(x^{n-1} + \sum_{j=0}^{h-n-1} c_{n-1,j}x^{n+j}\right) +$$

$$+ x^{n-1} + \sum_{j=0}^{h-n-1} c_{n-1,j}x^{n+j} + x^h\left(r_{n,n-1}(x) + p(x)\right) = x^{n-1} + \sum_{j=1}^{h-n-1} l_{n-1,j}x^{n+j}.$$

Предположим, что в полиномах, содержащихся в последней строке и $n-1$-, $n-2$-, ..., $n-i+1$-м столбцах матрицы $H(x)$, коэффициенты при x^n равны нулю, т. е. $d_{n-1,0} = d_{n-2,0} = \ldots = d_{n-i+1,0} = 0$, а $d_{n-i,0} \neq 0$. Умножим матрицу $H(x)$ слева на матрицу D, а справа — на матрицу $M(x)$, где

$$D = \begin{array}{c}\left\Vert\begin{matrix}
1 & & & & & 0 \\
 & 1 & & & 0 & 0 \\
 & & \ddots & & & \vdots \\
 & 0 & & & & d_{n-i,0} \\
-d_{n-i,0} & & & & & 0 \\
 & -d_{n-i,0} & & & & 0 \\
 & & \ddots & & & \vdots \\
0 & & & -d_{n-i,0} & 1 & 0 \\
 & & & & 0 & 1
\end{matrix}\right\Vert\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ -(i); \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$M(x) =$$

$$= \left\Vert\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
E_{i-1} & \multicolumn{5}{c}{0} \\
\hline
m_{i1}(x)\ \ldots & m_{ii}(x) & \ldots & m_{i,2i}(x) & \ldots & m_{in}(x) \\
\hline
d_{n-i,0}E_{i-1} & 0 & E_{i-1} & 0 & & 0 \\
\hline
d_{n-i,0}m_{i1}(x)\ \ldots & d_{n-i,0}m_{ii}(x) & \ldots & 1 + d_{n-i,0}m_{i,2i}(x) & \ldots & d_{n-i,0}m_{in}(x) \\
\hline
d_{n-i,0}^2E_{i-1} & 0 & d_{n-i,0}E_{i-1} & 0 & & 0 \\
\hline
d_{n-i,0}^2m_{1i}(x)\ \ldots & d_{n-i,0}^2m_{ii}(x) & \ldots & d_{n-i,0}(1 + d_{n-i,0}m_{i,2i}(x)) & \ldots & d_{n-i,0}^2m_{in}(x) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
m_{n1}(x) & m_{ni}(x) & \ldots & m_{n,2i}(x) & \ldots & m_{nn}(x)
\end{array}\right\Vert;$$

E_{i-1} — единичная матрица порядка $i-1$. Полиномы $m_{i\varepsilon}(x)$ и $m_{n\varepsilon}(x)$, $\varepsilon = 1, 2, \ldots, n$, матрицы $M(x)$ однозначно определяются равенствами

$$\left(1 + \sum_{\mu=1}^{t} d_{n-i,0}^{\mu}\left(x^{\mu i} + \sum_{j=0}^{h-n-1} d_{\mu i,j}x^{n+j}\right)\right)m_{ii}(x) + d_{n-i,0}x^{h}m_{ni}(x) = 1;$$

$$m_{in}(x) = -d_{n-i,0}x^{h};$$

$$m_{nn}(x) = 1 + \sum_{\mu=1}^{t} d_{n-i,0}^{\mu}\left(x^{\mu i} + \sum_{j=0}^{h-n-1} d_{\mu i,j}x^{n+j}\right);$$

$$m_{i\nu}(x) = -m_{ii}(x)\sum_{\tau=0}^{k} d_{n-i,0}^{\tau+1}\left(x^{\tau i+\nu} + \sum_{j=0}^{h-n-1} d_{\tau i+\nu,j}x^{n+j}\right);$$

$$m_{n\nu}(x) = -m_{ni}(x)\sum_{\tau=0}^{k} d_{n-i,0}^{\tau+1}\left(x^{\tau i+\nu} + \sum_{j=0}^{h-n-1} d_{\tau i+\nu,j}x^{n+j}\right);$$

$$t = \left[\frac{n-1}{i}\right] \text{— целая часть числа } \frac{n-1}{i};$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n-1; \qquad k = \left[\frac{n-\nu-1}{i}\right].$$

После приведения матрицы $DH(x)\,M(x)$ к виду (3) обозначим образованную матрицу через $K(x)$. Запишем полином последней строки и $n-i$-го столбца матрицы $K(x)$:

$$x^{n-i} + d_{n-i,0}x^{n} + \sum_{j=1}^{h-n-1} d_{n-i,j}x^{n+j} + x^{h}(m_{n,n-i}(x) + \eta_{n-i}(x)) +$$

$$+ m_{i,n-i}(x)\sum_{\mu=1}^{t} d_{n-i,0}^{\mu-1}\left(x^{\mu i} + \sum_{j=0}^{h-n-1} d_{\mu i,j}x^{n+j}\right) =$$

$$= x^{n-i} + d_{n-i,0}x^{n} + \sum_{j=1}^{h-n-1} d_{n-i,j}x^{n+j} + x^{h}(m_{n,n-i}(x) + \eta_{n-i}(x)) -$$

$$- m_{ii}(x)\sum_{\mu=1}^{t} d_{n-i,0}^{\mu-1}\left(x^{\mu i} + \sum_{j=0}^{h-n-1} d_{\mu i,j}x^{n+j}\right)\left(d_{n-i,0}\left(x^{n-i} + \sum_{j=0}^{h-n-1} d_{n-i,j}x^{n+j}\right) + \ldots\right) =$$

$$= x^{n-i} + \sum_{j=1}^{h-n-1} b_{n-i,j}x^{n+j}, \qquad t = \left[\frac{n-1}{i}\right].$$

Осталось проверить, что $b_{n-1,0} = b_{n-2,0} = \ldots = b_{n-i+1,0} = 0$. Действительно, пусть $s \in \{n-1, n-2, \ldots, n-i+1\}$. Полином последней строки и s-го столбца матрицы $K(x)$ имеет вид

$$m_{is}(x)\sum_{\mu=1}^{t} d_{n-i,0}^{\mu-1}\left(x^{\mu i} + \sum_{j=0}^{h-n-1} d_{\mu i,j}x^{n+j}\right) +$$

$$+ x^{h}(m_{ns}(x) + \eta_{s}(x)) + x^{s} + \sum_{j=1}^{h-n-1} d_{sj}x^{n+j} =$$

$$= -m_{ii}(x)\sum_{\mu=1}^{t} d_{n-i,0}^{\mu-1}\left(x^{\mu i} + \sum_{j=0}^{h-n-1} d_{\mu i,j}x^{n+j}\right)\left(d_{n-i,0}\left(x^{s} + \sum_{j=1}^{h-n-1} d_{sj}x^{n+j}\right) + \ldots\right) +$$

$$+ x^{h}(m_{ns}(x)\,\eta_{s}(x)) + x^{s} + \sum_{j=i}^{h-n-1} d_{sj}x^{n+j} = x^{s} + \sum_{j=1}^{h-n-1} b_{sj}x^{n+j}.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Полиномы $g_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, матрицы $G(x)$ вида (2) определяются матрицей $A(x)$ однозначно.

Доказательство. Пусть матрица $F(x)$ вида (2) полускалярно эквивалентна матрице $A(x)$ и $F(x) \not\equiv G(x)$. Тогда существуют числовая неособенная матрица S и обратимая полиномиальная матрица $V(x)$ такие, что $G(x) = SF(x)V(x)$. Расписав последнее равенство, получим совпадение матриц $G(x)$ и $F(x)$, что и доказывает теорему.

Определение. Матрицу $G(x)$ будем называть канонической формой матрицы $A(x)$ относительно полускалярно эквивалентных преобразований.

Легко показать, что матрицы $A(x)$ и $B(x)$ с условиями (1) полускалярно эквивалентны тогда и только тогда, когда их канонические формы совпадают.

Следствие. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и $B_1, B_2, \ldots, B_k$ — два набора матриц над P такие, что полиномиальные матрицы $A(x) = Ex^k + A_1x^{k-1} + \ldots + A_k$ и $B(x) = Ex^k + B_1x^{k-1} + \ldots + B_k$ удовлетворяют условиям (1). Тогда эти наборы подобны в том и только в том случае, если канонические формы матриц $A(x)$ и $B(x)$ совпадают.

1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К.: Наук. думка, 1977, с. 61—66.

Институт прикладних проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 19.06.78

УДК 512.83

Ли Гюн-Ы

К ОБРАЩЕНИЮ И ВОССТАНОВЛЕНИЮ ТЕПЛИЦЕВЫХ МАТРИЦ

Одной из центральных и трудных задач теории матриц является задача отыскания для данной неособенной матрицы обратной к ней. В настоящее время развит ряд специальных способов обращения ганкелевых и теплицевых матриц (см. [3] и библиографию к ней). Один из них состоит в восстановлении обратной матрицы по некоторым наперед определенным двум ее столбцам. Однако при этом возникает ряд случаев, когда обратная матрица однозначно не определяется никакой парой своих столбцов. В работе [1] развит способ восстановления обратной к ганкелевой (и как следствие, к теплицевой) матрице, применимой и в отмеченных выше исключительных случаях. В настоящей работе указанный способ развит в отношении обращения и восстановления теплицевых матриц.

Теплицевой матрицей называется матрица вида

$$T_n = \|c_{i-j}\|_{i,j=0}^{n-1}. \tag{1}$$

Лемма 1. Всякой невырожденной теплицевой матрице $T_n = \|c_{i-j}\|_{i,j=0}^{n-1}$ соответствует хотя бы одна порождающая ее пара многочленов

$$\begin{gathered} f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n; \\ h(\lambda) = b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \cdots + b_n \end{gathered} \tag{2}$$

такая, что

$$T_n = h(A_f)\, I_0^{\mathrm{I}}, \tag{3}$$

где

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \ldots & -a_1 \end{bmatrix}; \quad I_0^{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} i_0 & 0 & \ldots & 0 \\ i_1 & i_0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ i_{n-1} & i_{n-2} & \ldots & i_0 \end{pmatrix},$$

а числа i_q определяются рекуррентным соотношением

$$i_q + a_1 i_{q-1} + a_2 i_{q-2} + \cdots + a_n i_{q-n} = 0 \qquad (q = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

причем $i_0 = 1$, $i_q = 0$ при $q < 0$.