УДК 513.88

О. Г. Сторож

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАНИЧНОГО ОПЕРАТОРА В ВИДЕ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ ПАР

Исследуем условия независимости двух линейных операторов в гильбертовых пространствах, покажем их устойчивость при компактных возмущениях, а также установим, что для всякого граничного оператора существует преобразование, переводящее его в другой граничный оператор, компоненты которого являются независимыми. Используем при этом следующие обозначения: $B(H_1, H_2)$ — множество линейных непрерывных операторов с областью определения H_1 и областью значений, содержащейся в H_2; $R(W)$, $Z(W)$ — соответственно область значений и ядро оператора W; W/A — сужение W на множество A; $\oplus$, $\ominus$ — символы ортогональной суммы и ортогонального дополнения.

Определение 1. Пусть D, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства, $W_i \in B(D, \mathfrak{H}_i)$, $i = 1, 2$; $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, $W = (W_1, W_2) \in B(D, \mathfrak{H})$. Пара (W_1, W_2) называется независимой, если

$$R(W) = R(W_1) \oplus R(W_2).$$

Лемма 1. Следующие условия эквивалентны:

а) $R(W) = R(W_1) \oplus R(W_2)$;

б) $R(W_1 | Z(W_2)) = R(W_1)$; в) $R(W_2 | Z(W_1)) = R(W_2)$;

г) $Z(W_1) + Z(W_2) = D$.

Доказательство. То, что из условия «а» вытекает условие «б», очевидно. Далее, если $W_2 z = h_2$, $Wy = (W_1 z, 0)$, то $W(z - y) = (0, h_2)$, т. е. из условия «б» следует условие «в». Если же имеет место условие «в» и $y \in D$, то $y = x + (y - x)$, где x — решение уравнения $Wx = (0, W_2 y)$. Но $x \in Z(W_1)$, $y - x \in Z(W_2)$, поэтому выполняется условие «г». Наконец, если $h = (h_1, h_2) \in R(W_1) \oplus R(W_2)$ и выполняется условие «г», то существуют $y_1, y_2 \in D$ такие, что $W_i y_i = h_i$, $y_i = y_{i,1} + y_{i,2}$, $i = 1, 2$, где $y_{1,1}, y_{2,1} \in Z(W_1)$, $y_{1,2}, y_{2,2} \in Z(W_2)$. Легко видеть, что $W(y_{1,2} + y_{2,1}) = h$, следовательно, имеет место условие «а». Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть H, D, $\mathfrak{H}$ — гильбертовы пространства, причем D является позитивным подпространством для H [1]. Если $W \in B(D, \mathfrak{H})$ — нормально разрешимый, а $\Phi \in B(H, \mathfrak{H})$ — компактный операторы, $Z(W)$ плотно в H и $R(\Phi) \subset R(W)$, то $R(W - \Phi) = R(W)$.

Доказательство. Так как $Z(W)$ плотно в H, то $R(W) \subset R(W - \Phi)$. Обратное включение очевидно. Поэтому $R(W - \Phi) = R(W)$. Доказываемое утверждение вытекает из того, что оператор $W - \Phi$ нормально разрешим [2].

Теорема 1. Пусть H, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства; D — позитивное подпространство для H; $W_i \in B(D, \mathfrak{H}_i)$ — нормально разрешимые операторы; $\Phi_i \in B(H, \mathfrak{H}_i)$ — компактные операторы; $R(\Phi_i) \subset R(W_i)$, $i = 1, 2$; $W = (W_1, W_2)$; $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$; $Z(W)$ плотно в H. Если пара (W_1, W_2) независима, то и пара $(W_1 - \Phi_1, W_2 - \Phi_2)$ независима.

Для доказательства достаточно заметить, что в силу лемм 1 и 2 справедливы следующие соотношения: $R(W - \Phi) = R(W) = R(W_1) \oplus R(W_2) = R(W_1 - \Phi_1) \oplus R(W_2 - \Phi_2)$.

Определение 2. Пусть D — гильбертово пространство, а D_0 — его замкнутое линейное подпространство. Пара $(\mathfrak{H}, W^0)$ называется граничной для пары (D, D_0), если $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство; $W^0 \in B(D, \mathfrak{H})$; $R(W^0) = \mathfrak{H}$; $Z(W^0) = D_0$. При этом $\mathfrak{H}$ называется граничным пространством, а W^0 — основным граничным оператором. Оператор $W \in B(D, \mathfrak{H})$ называется граничным для (D, D_0), если существует ортопроектор $P \in B(\mathfrak{H})$ такой, что $W = PW^0$, где $(\mathfrak{H}, W^0)$ — граничная пара для (D, D_0).

Лемма 3. Для того чтобы оператор $W \in B(D, \mathfrak{H})$ был граничным для (D, D_0), необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) оператор W нормально разрешим; 2) $Z(W) \supset D_0$); 3) $\dim [Z(W) \ominus D_0] = \operatorname{codim} R(W)$.

Доказательство. Необходимость условий «1—3» очевидна. Покажем их достаточность. В силу условия «3» существует биекция $A: Z(W) \ominus D_0 \to \mathfrak{H} \ominus R(W)$. Положим $W^0y = Ay$; $y \in Z(W) \ominus D_0$; $W^0y = Wy$; $y \in D \ominus (Z(W) \ominus D_0)$. Ясно, что $W = PW^0$, где P — ортопроектор: $\mathfrak{H} \to R(W)$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть D, D_0, $\mathfrak{H}$ — такие, как в определении 2, причем $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$; $W_i \in B(D, \mathfrak{H}_i)$, $i = 1, 2$. Если $W = (W_1, W_2)$ — граничный оператор для (D, D_0), то при всяком $C \in B(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ $\tilde{W} = (W_1, W_2 - CW_1)$ — граничный оператор для (D, D_0).

Справедливость этого утверждения следует из леммы 3 и из того, что операторы $\tilde{W}$ и W отличаются множителем, имеющим в матричной записи вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -C & 1 \end{pmatrix}$, т. е. оператором, являющимся корректно обратимым при всех $C \in B(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$.

Теорема 2. Если выполняются все условия леммы 4, то существует $C \in B(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ такое, что пара $(W_1, W_2 - CW_1)$ независима.

Доказательство. Пусть W_1^{-1} — оператор, обратный к $W_1 \setminus D \ominus Z(W_1)$; $A = W_1(Z(W_1) + Z(W_2))$; $K = R(W_1) \ominus A$; $M = W_1^{-1}K$; P_K — ортопроектор: $\mathfrak{H}_1 \to K$. Так как оператор W_1 нормально разрешим, что следует из леммы 3, то в силу теоремы Банаха об обратном операторе [3] $W_1^{-1} \in B(R(W_1), D)$. Положим $C = W_2W_1^{-1}P_K$. Ясно, что $C \in B(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ и что $Z(W_2 - CW_1) = Z(W_2) + M$. Отсюда и из пункта «б» леммы 1 следует независимость операторов W_1 и $W_2 - CW_1$. Теорема доказана.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.— М. : Мир, 1972.— 740 с.
3. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1968.— 496 с.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию
17.10.78

УДК 512.8

О. М. Мельник

К ПОЛУСКАЛЯРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Рассмотрим полиномиальные $n \times n$-матрицы над кольцом $P[x]$, где P — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики.

Полиномиальные матрицы $A(x)$ и $B(x)$ называют полускалярно эквивалентными [1], если существуют числовая неособенная матрица Q над P и обратимая полиномиальная матрица $R(x)$ над $P[x]$ такие, что

$$A(x) = QB(x)R(x).$$

Пусть $A(x)$ — неособенная $n \times n$-матрица, удовлетворяющая условиям:

$$1.\ \Delta(x) = \det A(x) = (x - \alpha)^h, \quad h \geqslant n + 2;$$