$Q(s)$ (по лемме 4), а также то, что $\lim_{s\to\infty} A(s, \Theta, F, E) = 0$ равномерно по Θ, F, E, получаем выражение (32).

Асимптотическое представление решения задачи Коши для линейных обыкновенных уравнений находит применение в задачах теоретической физики, аналитического конструирования оптимального регулятора и др.

1. *Костенко Е. С.* Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка.— Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 10, с. 1900—1904.

Львовский университет Поступила в редколлегию 29.09.78

УДК 517.948.32 : 517.544

А. Н. Квитко

ВЕКТОРНО-МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ СЛОЖНОГО КОНТУРА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

На замкнутой ориентируемой римановой поверхности R рода $\rho > 0$ с фиксированной системой канонических сечений a_ν, b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \rho)$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_{\bar z} w(z) = B(z)\overline{w(z)}, \tag{1}$$

где $w(z) = \begin{bmatrix} w_1(z) \\ \cdots \\ w_n(z) \end{bmatrix}$; $B(z) = \begin{pmatrix} B_1(z) & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & B_n(z) \end{pmatrix}$ — ковариантная по $\bar z$; H-непрерывная всюду на R, за исключением конечного числа точек и линий разрыва I рода, квадратная матрица-функция размерности n, и сопряженное к (1) дифференциальное уравнение

$$\partial_{\bar z} v(z) = -\overline{v(z)B(z)} \tag{2}$$

относительно ковариантного вектора (строки) $v(z) = [v_1(z), \ldots, v_n(z)]$. Через $du_\nu(\tau)$ обозначим комплексно-нормированный базис абелевых дифференциалов I рода на R, а через $d\omega_{zz_0}(\tau)$ — обладающий нулевыми A-периодами абелев дифференциал III рода (по τ) с двумя простыми полюсами в точках $\tau = z$ и $\tau = z_0$ с вычетами в них, равными $+1$ и -1 соответственно [8]. Разрывным аналогом ядра Коши на R служит выражение $d\hat\omega_{zz_0}(\tau) = \int_{z_0}^{z} d_\chi [d\omega_{\chi z_0}(\tau)]$ [4]. Зададим на R сложный кусочно-гладкий контур Γ. На множестве точек $\{\Gamma\}$ контура Γ зададим дивизор Λ так, что множество $\Gamma \setminus \Lambda$ распадается на конечное число связных компонент $\{\Gamma_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, каждая из которых есть гладкая открытая ориентированная жорданова кривая, гомеоморфная интервалу $(0, 1)$. На каждой кривой $\overline{\Gamma}_j$ ($\overline{\Gamma}_j$ — замыкание Γ_j) заданы невырожденная H-непрерывная квадратная матрица-функция $G_j(t)$ размерности n и H-непрерывный вектор-столбец $g_j(t)$. Полагая $\alpha(t, \Gamma_j) = \delta_{kj}$ при $t \in \Gamma_k$ $(k, j = 1, 2, \ldots, N$; δ_{kj} — символ Кронекера), обозначим $G(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha(t, \Gamma_j) G_j(t)$, $t \in \Gamma \setminus \Lambda$. Вектор $g_j(t)$ вводится таким же образом. Пусть Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — дивизоры, заданные на $R \setminus \Gamma$. Обозначим через Δ вектор-дивизор (строку): $\Delta = [\Delta_1, \ldots, \Delta_n]$, а через $\Delta^{(-1)}$ — вектор-дивизор (столбец): $\Delta^{(-1)} = \begin{bmatrix} \Delta_1^{(-1)} \\ \cdots \\ \Delta_n^{(-1)} \end{bmatrix}$.

Рассмотрим задачи: найти все кусочно-мероморфные на R решения уравнения (1), кратные на $R \setminus \Gamma$ вектору-дивизору $\Delta^{(-1)}$, H-непрерывно продолжимые на $\Gamma \setminus \Lambda$, где выполняется одно из следующих краевых условий:

$$w^+(t) = G(t) w^-(t), \quad \Delta^{(-1)} \mid (w), \quad t \in \Gamma \setminus \Lambda; \tag{3}$$

$$w^+(t) = G(t) w^-(t) + g(t), \quad \Delta^{(-1)} \mid (w), \quad t \in \Gamma \setminus \Lambda. \tag{4}$$

Наряду с задачами (3), (4) сформулируем однородную задачу: найти все кусочно-мероморфные на R решения уравнения (2), кратные на $R \setminus \Gamma$ вектору-дивизору Δ, H-непрерывно продолжимые на $\Gamma \setminus \Lambda$, где выполняется краевое условие

$$v^-(t) = v^+(t) G(t), \quad \Delta \mid (v), \quad t \in \Gamma \setminus \Lambda. \tag{5}$$

Указанные задачи изучаются на плоской топологической модели R — фундаментальном нормальном многоугольнике Q. В случае, когда Γ состоит из конечного числа замкнутых гладких непересекающихся кривых, а коэффициенты задач H-непрерывны, задачи (3) — (5) для одной неизвестной функции исследованы в работах [5—7]. Допустим, что контур Γ имеет конечное число узлов, а коэффициенты задач — разрывы первого рода в точках дивизора Λ.

Введем интегральный оператор

$$(Pf)(z) = \frac{1}{\pi} \iint_Q D(\tau) \overline{f(\tau)} \left[\hat{\omega}_{zz_0}(\tau) - \hat{\omega}_{\tilde{z}z_0}(\tau)\right] d\xi d\eta,$$

где $D(\tau) \in H_\alpha(Q)$, за исключением конечного числа точек и линий разрыва I рода; $\tilde{z} \in Q$, $\tau = \xi + i\eta$. Через $H^{(0)}_{\alpha,\rho}(Q)$ обозначим совокупность всех функций $f(z) \in H_\alpha(Q)$, для которых

$$\iint_Q D(\tau) \overline{f(\tau)} u'_\nu(\tau) d\xi d\eta = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Очевидно, что $H^{(0)}_{\alpha,\rho}(Q)$ есть подпространство $H_\alpha(Q)$. Из представления $\hat{\omega}_{zz_0}(\tau) = \frac{1}{\tau - z} +$ регулярные члены и результатов И. Н. Векуа [1] относительно оператора $(Tf)(z) = \frac{1}{\pi} \iint_Q \frac{D(\tau) f(\tau)}{\tau - z} d\xi d\eta$ следует, что P является вполне непрерывным оператором, действующим из $H_\alpha(Q)$ в $H_\alpha(Q)$.

Теорема 1. Пусть τ_0 — фиксированная точка Q. Каждое решение $w(z)$ уравнения (1), кратное заданному вектору-дивизору $\Delta^{(-1)}$, допускает представление

$$w(z) = \overset{(0)}{w}(z) \Phi(z), \tag{6}$$

где $\Phi(z) = \begin{bmatrix} \Phi_1(z) \\ \cdots \\ \Phi_n(z) \end{bmatrix}$ — кусочно-мероморфная на Q вектор-функция, кратная дивизору $\Delta^{(-1)}$, а $\overset{(0)}{w}(z) = \begin{pmatrix} \overset{(0)}{w}_1(z) & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & & \overset{(0)}{w}_n(z) \end{pmatrix}$ — квадратная матрица-функция, обладающая следующими свойствами:

1. $\overset{(0)}{w}(z) \in H^{(0)}_{\alpha,\rho}(Q)$ $\left(\text{т. е. } \overset{(0)}{w}_i(z) \in H_\alpha(Q) \text{ и } \iint_Q B_i(\tau) \frac{\overline{\Phi_i(\tau)}}{\Phi_i(\tau)} \overline{\overset{(0)}{w}_i(\tau) u'_\nu(\tau)} d\xi d\eta = 0, \ \nu = 1, 2, \ldots, \rho; \ i = 1, 2, \ldots, n\right)$;

2. $\overset{(0)}{w}(\tau_0) = E$ (E — единичная матрица размерности n);

3. $\det \overset{(0)}{w}(z) \neq 0$ (в Q).

Доказательство. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ рассмотрим интегральное уравнение

$$\overset{(0)}{w}_i(z) + \frac{1}{\pi} \iint\limits_Q B_i(\tau) \frac{\overline{\Phi_i(\tau)}}{\Phi_i(\tau)} \overline{\overset{(0)}{w}_i(\tau)} [\hat{\omega}_{zz_0}(\tau) - \hat{\omega}_{\tau_0 z_0}(\tau)] \, d\xi d\eta = 1 \tag{7}$$

и соответствующее ему однородное уравнение. Каждое решение $\overset{(0)}{w}_i(z)$ однородного уравнения, принадлежащее $H^{(0)}_{\alpha,\rho}(Q)$, является H-непрерывным на R в силу периодичности интеграла

$$\iint\limits_Q B_i(\tau) \frac{\overline{\Phi_i(\tau)}}{\Phi_i(\tau)} \overline{\overset{(0)}{w}_i(\tau)} [\hat{\omega}_{zz_0}(\tau) - \hat{\omega}_{\tau_0 z_0}(\tau)] \, d\xi d\eta$$

в этом классе функций [4] и, кроме того, почти везде на R $\partial_{\bar{z}} \overset{(0)}{w}_i(z) = B_i(z) \frac{\overline{\Phi_i(z)}}{\Phi_i(z)} \overline{\overset{(0)}{w}_i(z)}$. Учитывая, что $\overset{(0)}{w}_i(\tau_0) = 0$, получаем, $\overset{(0)}{w}_i(z) \equiv 0$ на R (т. е. в Q) [1, 2]. Следовательно, уравнение (7) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям $\overset{(0)}{w}_i(z) \in H^{(0)}_{\alpha,\rho}(Q)$ и $\overset{(0)}{w}_i(\tau_0) = 1$. Если бы $\overset{(0)}{w}_i(\hat{z}) = 0$ $(\hat{z} \in Q)$, то из уравнения (7) имели бы

$$\overset{(0)}{w}_i(z) + \frac{1}{\pi} \iint\limits_Q B_i(\tau) \frac{\overline{\Phi_i(\tau)}}{\Phi_i(\tau)} \overline{\overset{(0)}{w}_i(\tau)} [\hat{\omega}_{zz_0}(\tau) - \hat{\omega}_{\hat{z}z_0}(\tau)] \, d\xi d\eta = 0.$$

Но последнее уравнение, как отмечено выше, имеет лишь тривиальное решение. Свойства «1—3» матрицы $\overset{(0)}{w}(z)$ теперь очевидны. Проверяется непосредственно, что формула (6) определяет решение уравнения (1) всюду в Q, исключая множество особенностей $\Phi(z)$. Из формулы (6) и свойств «1» и «3» матрицы $\overset{(0)}{w}(z)$ вытекает кратность вектор-функции $w(z)$ дивизору $\Delta^{(-1)}$. Теорема доказана.

Замечание 1. Уравнение (7) можно решать методом последовательных приближений. Приходим к формуле

$$\overset{(0)}{w}_i(z) = 1 + \iint\limits_Q \overset{i}{\Gamma}_1(z, \tau) \, d\xi d\eta + \iint\limits_Q \overset{i}{\Gamma}_2(z, \tau) \, d\xi d\eta,$$

где $\overset{i}{\Gamma}_\mu(z, \tau)$ $(\mu = 1, 2)$ — резольвенты уравнения (7).

Теорема 2. Пусть $\hat{\tau}$ — фиксированная точка Q. Каждое решение $v(z)$ уравнения (2), кратное заданному вектору-дивизору Δ, допускает представление

$$v(z) = d\Psi(z) \overset{(0)}{v}(z), \tag{8}$$

где $d\Psi(z) = [d\Psi_1(z), \ldots, d\Psi_n(z)]$ — кусочно-мероморфный на Q вектор-дифференциал, кратный дивизору Δ, а $\overset{(0)}{v}(z) = \begin{pmatrix} \overset{(0)}{v}_1(z) & 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0 & \overset{(0)}{v}_n(z) \end{pmatrix}$ — квадратная матрица-функция, обладающая свойствами:

1. $\overset{(0)}{v}(z)\in H^{(0)}_{\alpha,\rho}(Q)\Big($т. е. $\overset{(0)}{v}_i(z)\in H_\alpha(Q)$ и $\iint\limits_Q \overline{B_i(\tau)}\,\frac{\overline{d\Psi_i(\tau)}}{d\Psi_i(\tau)}\,\overset{(\overline{0})}{v}_i(\tau)\,u'_\nu(\tau)\,d\xi d\eta=$
$=0,\quad \nu=1, 2, \ldots, \rho;\quad i=1, 2, \ldots, n\Big)$;

2. $\overset{(0)}{v}(\hat{\tau})=E$;

3. $\det\overset{(0)}{v}(z)\neq 0$ (в Q).

Доказательство этой теоремы аналогично предыдущему.

Замечание 2. Элементы матрицы $\overset{(0)}{v}(z)$ находятся методом последовательных приближений из уравнений

$$\overset{(0)}{v}_i(z)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_Q \overline{B_i(\tau)}\,\frac{\overline{d\Psi_i(\tau)}}{d\Psi_i(\tau)}\,\overline{\overset{(0)}{v}_i(\tau)}\,[\hat{\omega}_{zz_0}(\tau)-\hat{\omega}_{\hat{\tau}z_0}(\tau)]\,d\xi d\eta=1.$$

Назовем задачу

$$v^-(t)=v^+(t)\,\overset{(0)}{v}{}^{-1}(t)\,\overset{(0)}{w}{}^{-1}(t)\,G(t)\,\overset{(0)}{w}(t)\,\overset{(0)}{v}(t),\quad \Delta\,|\,(v),\quad t\in\Gamma\setminus\Lambda, \tag{3'}$$

сопряженной к задаче (3). Пользуясь формулами (6) и (8), сведем задачи (3) и (4) к виду

$$\Phi^+(t)=\overset{(0)}{w}{}^{-1}(t)\,G(t)\,\overset{(0)}{w}(t)\,\Phi^-(t),\quad \Delta^{(-1)}\,|\,(\Phi),\quad t\in\Gamma\setminus\Lambda;$$

$$\Phi^+(t)=\overset{(0)}{w}{}^{-1}(t)\,G(t)\,\overset{(0)}{w}(t)\,\Phi^-(t)+\overset{(0)}{w}{}^{-1}(t)\,g(t),\quad \Delta^{(-1)}\,|\,(\Phi),\quad t\in\Gamma\setminus\Lambda,$$

а задачу (3′) — к виду

$$d\Psi^-(t)=d\Psi^+(t)\,\overset{(0)}{w}{}^{-1}(t)\,G(t)\,\overset{(0)}{w}(t),\quad \Delta\,|\,(d\Psi),\quad t\in\Gamma\setminus\Lambda.$$

Если теперь l — число линейно-независимых решений задачи (3), а l' — число линейно-независимых решений задачи (3′), то опираясь на результаты работы [4], приходим к таким теоремам.

Теорема 3. Числа l и l' связаны соотношением $l-l'=2\varkappa+2\operatorname{ord}\Delta-2n(\rho-1)$ (индекс задачи (3)), где $\varkappa=\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{j=1}^{N}\{\arg\det(\overset{(0)}{w}{}^{-1}(t)\,G(t)\,\overset{(0)}{w}(t))\}_{\Gamma_j}=\frac{1}{2\pi}\sum\limits_{j=1}^{N}\{\arg\det G(t)\}_{\Gamma_j}$, а $\operatorname{ord}\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\operatorname{ord}\Delta_i$.

Теорема 4. Задача (4) имеет решение в том и только в том случае, когда $\int\limits_\Gamma v^+(t)\overset{(0)}{v}{}^{-1}(t)\overset{(0)}{w}{}^{-1}(t)\,g(t)=0$ для каждого решения $v(z)$ задачи (3′).

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.— М.: Физматгиз, 1959.— 628 с.
2. *Данилюк И. И.* Об интегральном представлении решений некоторых эллиптических систем 1-го порядка на поверхностях с приложением к теории оболочек.— Докл. АН СССР, 1956, **109**, № 1, с. 17—20.
3. *Зверович Л. Ф.* Задача Римана для пар функций на римановой поверхности в случае сложного контура.— СМЖ, 1975, **16**, № 3, с. 510—519.
4. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях.— УМН, 1971, **26**, вып. 1, с. 113—179.
5. *Михайлов Л. Г.* Краевая задача типа задачи Римана для системы дифференциальных уравнений 1-го порядка эллиптического типа и некоторые интегральные уравнения.— Учен. зап. Тадж. ун-та, 1957, **10**, с. 32—73.
6. *Родин Ю. Л.* Интегралы типа Коши и краевые задачи для обобщенных аналитических функций на замкнутых римановых поверхностях. — Докл. АН СССР, 1962, **142**, № 4, с. 798—801.
7. *Сербин А. И.* О краевой задаче Римана для обобщенных аналитических функций на замкнутой римановой поверхности.— Изв. вузов. Математика, 1964, № 4, с. 131—143.
8. *Шиффер М., Спенсер Д. К.* Функционалы на конечных римановых поверхностях.— М.: Изд-во иностр. лит., 1957.— 427 с.

Одесский педагогический институт

Поступила в редколлегию 30.09.78