УДК 517.913

М. П. Карпа

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$y''' + p(x)\,y' + (\lambda G^{-3}(x) + g(x))\,y = 0 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(x)|_{x=\tau} = q_1(\tau, \alpha, \beta, \gamma), \quad y'(x)|_{x=\tau} = q_2(\tau, \alpha, \beta, \gamma), \quad y''(x)|_{x=\tau} = q_3(\tau, \alpha, \beta, \gamma). \tag{2}$$

Считаем, что параметры α, β, γ подчинены условию

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3}$$

Пусть $g(x)$ непрерывна; $p(x)$ и $G(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции соответственно один и три раза на интервале $x_0 \leqslant x \leqslant \infty$. Если β_1, β_2, β_3 — корни уравнения $\beta^3 + \mu\beta - \lambda = 0$, для которых $\beta_2\beta_3 - \frac{1}{4}\beta_1^2 = 0$, тогда на основании работы [1] из условий

$$\begin{gathered}\int_{x_0}^{\infty} b(t)\,dt < \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \varphi(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} G^{-1}(t)\,dt = \infty; \\ \lim_{x\to\infty} P(x)\,G^2(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} (A(x) - p(x))\,G^2(x) = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} A(x) = G^{-2}(x)\,(\mu - 2G''(x)\,G(x) + G'^2(x)); \\ P(x) = (G'(x) + \beta_1)(A(x) - p(x)) + G(x)\left(\frac{A'(x)}{2} - p'(x) + g(x)\right); \\ Q(x) = \left(G'(x) - \frac{1}{2}\beta_1\right)(A(x) - p(x)) + G(x)\left(\frac{A'(x)}{2} - p'(x) + g(x)\right); \\ b(x) = 3\,|G(x)|\max_x\left[|P(x)|, \ \left|\frac{3}{2}\beta_1 Q(x)\,\varphi(x, x_0)\right|\right]; \end{gathered} \tag{5}$$

μ, λ — произвольные постоянные, следует, что уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $y_1(x, x_0)$, $y_2(x, x_0)$, $y_3(x, x_0)$, асимптотическое представление которых при $x \to \infty$ дают формулы

$$\begin{gathered} y_1(x, x_0) = G(x)\exp\left[\frac{1}{2}\beta_1\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)), \quad x \to \infty; \\ y_2(x, x_0) = G(x)\,\varphi(x, x_0)\exp\left[\frac{1}{2}\beta_1\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)), \quad x \to \infty; \\ y_3(x, x_0) = G(x)\exp\left[-\beta_1\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)), \quad x \to \infty. \end{gathered} \tag{6}$$

При этом главные части асимптотического представления первых и вторых производных этой фундаментальной системы решений есть производные главной части (6) соответственно первого и второго порядка.

Легко убедиться, что вронскиан главной части фундаментальной системы $W(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{3\beta_1}{2}\right)^2$. Если решение задачи (1), (2) обозначить через $y(x, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$, то

$$y(x, \tau, \alpha, \beta, \gamma) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x), \tag{7}$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ — фундаментальная система решений уравнения (1), а коэффициенты c_1, c_2, c_3 определяются из условий (2).

Рассматривая решение (7) при $x \to \infty$ и используя асимптотические формулы (6), после несложных преобразований с учетом условий (4) получаем

$$y(x, \tau, \alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{2}{3\beta_1}\right)^2 G(x)\,\varphi(x\tau)\exp\left[\frac{1}{2}\beta_1\varphi(x, \tau)\right] \times$$
$$\times\left[A(\tau, \alpha, \beta, \gamma) + \left(\frac{3\beta_1}{2}\right)^2\cos\beta + o(1)\right], \quad x \to \infty, \tag{8}$$

где

$$A(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = \{q_1(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\,[y_3'(\tau)\,y_1''(\tau) - y_1'(\tau)\,y_3''(\tau)] +$$
$$+ q_2(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\,[y_1(\tau)\,y_3''(\tau) - y_3(\tau)\,y_1''(\tau)] + q_3(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\,[y_3(\tau)\,y_1'(\tau) -$$
$$- y_1(\tau)\,y_3'(\tau)]\}\exp\left[\frac{1}{2}\beta_1\varphi(\tau, x_0)\right] - \left(\frac{3\beta_1}{2}\right)^2\cos\beta. \tag{9}$$

Если выбрать

$$q_1(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = G(\tau)(\cos\alpha + \varphi(\tau, x_0)\cos\beta + \cos\gamma);$$
$$q_2(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = \left(G'(\tau) + \frac{\beta_1}{2}\right)(\cos\alpha + \varphi(\tau, x_0)\cos\beta) + \cos\beta +$$
$$+ (G'(\tau) - \beta_1)\cos\gamma; \tag{10}$$
$$q_3(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = \left(G''(\tau) + \frac{1}{2}\beta_1 G'(\tau)\,G^{-1}(\tau) + \frac{1}{4}\beta_1^2 G^{-1}(\tau)\right)(\cos\alpha +$$
$$+ \varphi(\tau, x_0)\cos\beta) + G^{-1}(\tau)\,(G'(\tau) + \beta_1)\cos\beta + (G''(\tau) - \beta_1 G'(\tau)\,G^{-1}(\tau) +$$
$$+ \beta_1^2 G^{-1}(\tau))\cos\gamma,$$

то легко проверить, что $\lim\limits_{\tau\to\infty} A(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = 0$ равномерно по α, β, γ.

Аналогично получим

$$y'_x(x, \tau, \alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{2}{3\beta_1}\right)^2\left[\left(G'(x) + \frac{1}{2}\beta_1\right)\varphi(x, \tau) + o(1)\right] \times$$
$$\times\exp\left(\frac{1}{2}\beta_1\varphi(x, \tau)\right)\left[A(\tau, \alpha, \beta, \gamma) + \left(\frac{3\beta_1}{2}\right)^2\cos\beta + o(1)\right], \quad x \to \infty; \tag{11}$$
$$y''_{x^2}(x, \tau, \alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{2}{3\beta_1}\right)^2\left[G''(x) + \frac{1}{2}\beta_1 G'(x)\,G^{-1}(x) +\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{4}\beta_1^2 G^{-1}(x)\,\varphi(x, \tau) + G^{-1}(x)\,(G'(x) + \beta_1)\right]\exp\left(\frac{1}{2}\beta_1\varphi(x, \tau)\right) \times$$
$$\times\left[A(\tau, \alpha, \beta, \gamma) + \left(\frac{3\beta_1}{2}\right)^2\cos\beta + o(1)\right], \quad x \to \infty. \tag{12}$$

Таким образом, доказано такое утверждение.

Лемма 1. Решение задачи (1), (2) и его производные при $x \to \infty$ представляются асимптотическими формулами (8), (11), (12). При этом $\lim\limits_{\tau\to\infty} A(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = 0$ равномерно по α, β, γ.

Лемма 2. Для достаточно малых Δ имеет место тождество

$$y(x, \tau, \alpha, \beta, \gamma) = h(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \Delta)\,y(x, \tau + \Delta, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*), \tag{13}$$

где

$$h(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \Delta) = \frac{2}{3\beta_1}\left\{\left[y'(\tau + \Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) + (\beta_1 - G'(\tau + \Delta)\,G^{-1}(\tau + \Delta)) \times\right.\right.$$
$$\left.\times\, y(\tau + \Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) - \left(\varphi(\tau + \Delta, x_0) + \frac{2}{3\beta_1}\right)M(\tau + \Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma)\right]^2 +$$
$$+ M^2(\tau + \Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) + \left[\left(G'(\tau + \Delta) + \frac{1}{2}\beta_1\right)G^{-1}(\tau + \Delta)\,y(\tau +\right.$$

$$+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) - y'(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) +$$

$$+ \frac{2}{3\beta_1} M(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma)\Big]^2\Big\}^{\frac{1}{2}}; \qquad (14)$$

$$\cos\alpha^* = \frac{2}{3\beta_1} h^{-1}(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \Delta)\Big\{y''(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) + (\beta_1 - G'(\tau+\Delta)) \times$$

$$\times G^{-1}(\tau+\Delta)\, y(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) -$$

$$-\Big(\varphi(\tau+\Delta, x_0) + \frac{2}{3\beta_1}\Big) M(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma)\Big\}; \qquad (15)$$

$$\cos\beta^* = \frac{2}{3\beta_1} h^{-1}(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \Delta)\, M(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma); \qquad (16)$$

$$\cos\gamma^* = \frac{2}{3\beta_1} h^{-1}(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \Delta)\Big\{\Big(G'\Big(\tau+\Delta\Big) + \frac{1}{2}\beta_1\Big) G^{-1}(\tau+\Delta)\, y(\tau+$$

$$+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) - y'(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) + \frac{2}{3\beta_1} M(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma)\Big\}; \qquad (17)$$

$$M(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) = G(\tau+\Delta)\, y''(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) -$$

$$-\Big(G''(\tau+\Delta)\, G(\tau+\Delta) - G'^2(\tau+\Delta) + \frac{1}{2}\beta_1 G'(\tau+\Delta) + \frac{1}{2}\beta_1^2\Big) G^{-1}(\tau+$$

$$+\Delta)\, y(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma) + \Big(\frac{1}{2}\beta_1 - G'(\tau+\Delta)\, y'(\tau+\Delta, \tau, \alpha, \beta, \gamma)\Big). \qquad (18)$$

Кроме того, при $\Delta \to 0$

$$\begin{aligned} h(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \Delta) &= 1 + \Delta r(\tau, \alpha, \beta, \gamma) + o(\Delta); \\ \alpha^* &= \alpha + \Delta l(\tau, \alpha, \beta, \gamma) + o(\Delta); \\ \beta^* &= \beta + \Delta k(\tau, \alpha, \beta, \gamma) + o(\Delta); \\ \gamma^* &= \gamma + \Delta f(\tau, \alpha, \beta, \gamma) + o(\Delta); \end{aligned} \qquad (19)$$

где

$$r(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{2}{3\beta_1} N(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\Big(\cos\beta + \frac{2}{3\beta_1}\cos\gamma -$$

$$-\Big(\varphi(\tau, x_0) + \frac{2}{3\beta_1}\Big)\cos\alpha\Big) + \frac{1}{3} G^{-1}(\tau)\cos\beta(\cos\alpha - \cos\gamma) +$$

$$+ \frac{1}{2}\beta_1 G^{-1}(\tau)(\cos\alpha + \varphi(\tau, x_0)\cos\beta)\cos\alpha - \beta_1 G^{-1}(\tau)\cos^2\gamma; \qquad (20)$$

$$l(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\sin\alpha}\Big[r(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\cos\alpha + \frac{2}{3\beta_1}\Big(\varphi(\tau, x_0) + \frac{2}{3\beta_1}\Big) N(\tau, \alpha, \beta, \gamma) -$$

$$- \frac{1}{3} G^{-1}(\tau)\cos\beta - \frac{1}{2}\beta_1 G^{-1}(\tau)(\cos\alpha + \varphi(\tau, x_0)\cos\beta)\Big]; \qquad (21)$$

$$K(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\sin\beta}\Big[r(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\cos\beta - \frac{2}{3\beta_1} N(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\Big]; \qquad (22)$$

$$f(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\sin\gamma}\Big[r(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\cos\gamma + \beta_1 G^{-1}(\tau)\cos\gamma + \frac{1}{3} G^{-1}(\tau)\cos\beta -$$

$$-\Big(\frac{2}{3\beta_1}\Big)^2 N(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\Big]; \qquad (23)$$

$$N(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}\beta_1\Big[\Big(G''(\tau) + \frac{1}{2}\beta_1 G'(\tau) G^{-1}(\tau) + \frac{1}{4}\beta_1^2 G^{-1}(\tau)\Big)(\cos\alpha +$$

$$+ \varphi(\tau, x_0)\cos\beta) + G^{-1}(\tau)(G'(\tau) + \beta_1)\cos\beta + (G''(\tau) - \beta_1 G'(\tau) G^{-1}(\tau) +$$

$$+ \beta_1^2 G^{-1}(\tau))\cos\gamma\Big] - \Big(2G''(\tau)\, G(\tau) + p(\tau)\, G^2(\tau) - G'^2(\tau) + \frac{1}{2}\beta_1 G'(\tau) +$$

$$+\frac{1}{2}\beta_1^2\Big)G^{-1}(\tau)\Big(\Big(G'(\tau)+\frac{1}{2}\beta_1\Big)(\cos\alpha+\varphi(\tau, x_0)\cos\beta)+\cos\beta+$$

$$+(G'(\tau)-\beta_1)\cos\gamma\Big)-\Big(G'''(\tau)+g(\tau)G(\tau)+\Big(\frac{1}{2}\beta_1-2G'(\tau)\Big)G''(\tau)G^{-1}(\tau)+$$

$$+\Big(G'^3(\tau)-\frac{1}{2}\beta_1 G'^2(\tau)-\frac{1}{2}\beta_1^2 G^{-1}(\tau)+\lambda\Big)G^{-2}(\tau)\Big)G(\tau)(\cos\alpha+$$

$$+\varphi(\tau, x_0)\cos\beta+\cos\gamma). \tag{24}$$

Доказательство. Тождество (13) следует из теоремы единственности решения задачи Коши. Действительно, $y(x, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$ и $h(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \Delta)\, y(x, \tau+\Delta, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ есть решения уравнения (1). Кроме того, функции $h(\tau, \alpha, \beta, \gamma, \Delta)$, $\cos\alpha^*$, $\cos\beta^*$, $\cos\gamma^*$ выбраны так, что левая и правая части (13), а также их производные первого и второго порядков при $x=\tau+\Delta$ совпадают. Затем, если все функции, входящие справа в выражения (14) — (17), разложить по степеням Δ по формуле Тейлора, то получим (19) с коэффициентами (20) — (23).

Лемма 3. Функция $A(\tau, \alpha, \beta, \gamma)$ удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}+\frac{\partial A}{\partial\alpha}l(\tau, \alpha, \beta, \gamma)+\frac{\partial A}{\partial\beta}K(\tau, \alpha, \beta, \gamma)+\frac{\partial A}{\partial\gamma}f(\tau, \alpha, \beta, \gamma)=$$

$$=\Big(\frac{1}{2}\beta_1 G^{-1}(\tau)-r(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\Big)A(\tau, \alpha, \beta, \gamma)+\tilde{g}_1(\tau, \alpha, \beta, \gamma), \tag{25}$$

где

$$\tilde{g}_1(\tau, \alpha, \beta, \gamma)=\Big(\frac{3\beta_1}{2}\Big)^2\Big[\Big(\frac{\beta_1}{2}G^{-1}(\tau)-r(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\Big)\cos\beta+$$

$$+K(\tau, \alpha, \beta, \gamma)\sin\beta\Big]. \tag{26}$$

Действительно, уравнение (25) следует из (13), если в последнее подставить $y(x, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$ и $y(x, \tau+\Delta, \alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ по формуле (8) и с учетом (19) перейти к пределу при $\Delta\to 0$.

Лемма 4. Пусть $\Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$, $F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$, $E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$ — решения задачи Коши

$$\Theta'_s(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)=l[s, \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma), F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma), E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)],$$
$$\Theta(\tau, \tau, \alpha, \beta, \gamma)=\alpha;$$

$$F'_s(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)=K[s, \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma), F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma), E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)],$$
$$F(\tau, \tau, \alpha, \beta, \gamma)=\beta; \tag{27}$$

$$E'_s(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)=f[s, \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma), F(s, \tau, \alpha, \gamma), E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)],$$
$$E(\tau, \tau, \alpha, \beta, \gamma)=\gamma$$

и конец вектора $a(\cos\Theta, \cos F, \cos E)$ не лежит между плоскостями

$$y+\delta=0; \quad y-\delta=0 \tag{28}$$

при некотором фиксированном $\delta>0$. Тогда

$$Q(s)=\exp\Big\{\int_\tau^s\Big[r(t, \Theta(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma), F(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma), E(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma))-\frac{1}{2}\beta_1 G^{-1}(t)\Big]dt\Big\} \tag{29}$$

ограничена при $s\to\infty$.

Доказательство. Легко проверить, что

$$Q(s)\equiv$$

$$\equiv\frac{A(\tau, \alpha, \beta, \gamma)+\Big(\frac{3\beta_1}{2}\Big)^2\cos\beta}{A[s, \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma), F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma), E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)]+\Big(\frac{3\beta_1}{2}\Big)^2\cos F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)}. \tag{30}$$

Действительно, правые части (30) и (29) при $s = \tau$ совпадают. Далее, равенство (29) и правая часть (30) удовлетворяют уравнению

$$\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\beta_1}{2} G^{-1}(s) - r[s,\ \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)]\right) \times \times X = 0. \tag{31}$$

В этом можно легко убедиться, если учесть соотношение (29) и для правой части (30) — соотношения (25), (27). Теперь справедливость тождества (30) следует из теоремы единственности задачи Коши для уравнения (31). Затем из этого тождества при условии (28) и при $s \to \infty$ получаем

$$Q(s) < B\left(A(\tau, \alpha, \beta\ \gamma) + \left(\frac{3\beta_1}{2}\right)^2 \cos\beta\right),$$

где B — некоторая постоянная, зависящая от δ.

Теорема. Пусть выполняются условия (3), (4), (28). Тогда для решения задачи (1), (2) при $x \to \infty$ имеют место асимптотические представления (8), (11), (12), где

$$A(\tau, \alpha, \beta, \gamma) = -\int_\tau^\infty \left\{\tilde{g}_1(s,\ \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma), E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)) \times \exp\left[-\int_\tau^s \left(\frac{1}{2}\beta_1 G^{-1}(t) - r(t, \Theta(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma), F(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma), E(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma))\right) dt\right]\right\} ds; \tag{32}$$

$r(s, \Theta, F, E)$; $l(s, \Theta, F, E)$; $K(s, \Theta, F, E)$; $f(s, \Theta, F, E)$; $\breve{g}_1(s, \Theta, F, E)$ определены формулами (20) — (23), (26), а $\Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$; $F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$; $E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$ — решения задачи (27).

Для доказательства теоремы достаточно получить выражение (32). Рассмотрим функции $A(s, \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$; $F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$; $E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma))$. Используя лемму 3, находим

$$\frac{d}{ds} A(s,\ \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)) =$$
$$= \left[\frac{\beta_1}{2} G^{-1}(s) - r(s,\ \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma))\right] \times$$
$$\times A(s,\ \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)) +$$
$$+ \tilde{g}_1(s,\ \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)),$$

откуда следует, что

$$A(s,\ \Theta(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma), F(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ E(s, \tau, \alpha, \beta, \gamma)) = \exp\left\{\int_\tau^s \left[\frac{1}{2}\beta_1 G^{-1}(t) - r(t,\ \Theta(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ F(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ E(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma))\right] dt\right\} \left\{A(\tau, \alpha, \beta, \gamma) + \int_\tau^s \left[\tilde{g}_1(t,\ \Theta(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ F(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ E(t, \tau, \alpha, \beta, \gamma)) \times \exp\left[-\int_\tau^t \left[\frac{\beta_1}{2} G^{-1}(\omega) - r(\omega,\ \Theta(\omega, \tau, \alpha, \beta, \gamma),\ F\ (\omega, \tau, \alpha, \beta, \gamma), E\ (\omega, \tau, \alpha, \beta, \gamma))\right] d\omega\right]\right] dt\right\}.$$

Переходя здесь к пределу при $s \to \infty$ и учитывая ограниченность функции

$Q(s)$ (по лемме 4), а также то, что $\lim\limits_{s\to\infty} A(s, \Theta, F, E) = 0$ равномерно по Θ, F, E, получаем выражение (32).

Асимптотическое представление решения задачи Коши для линейных обыкновенных уравнений находит применение в задачах теоретической физики, аналитического конструирования оптимального регулятора и др.

1. *Костенко Е. С.* Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка.— Дифференц. уравнения, 1974, **10**, № 10, с. 1900—1904.

Львовский университет Поступила в редколлегию 29.09.78

УДК 517.948.32 : 517.544

А. Н. Квитко

ВЕКТОРНО-МАТРИЧНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ СЛОЖНОГО КОНТУРА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

На замкнутой ориентируемой римановой поверхности R рода $\rho > 0$ с фиксированной системой канонических сечений a_ν, b_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, \rho)$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_{\bar z} w(z) = B(z)\overline{w(z)}, \tag{1}$$

где $w(z) = \begin{bmatrix} w_1(z) \\ \cdots \\ w_n(z) \end{bmatrix}$; $B(z) = \begin{pmatrix} B_1(z) & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & B_n(z) \end{pmatrix}$ — ковариантная по $\bar z$; H-непрерывная всюду на R, за исключением конечного числа точек и линий разрыва I рода, квадратная матрица-функция размерности n, и сопряженное к (1) дифференциальное уравнение

$$\partial_{\bar z} v(z) = -\overline{v(z)B(z)} \tag{2}$$

относительно ковариантного вектора (строки) $v(z) = [v_1(z), \ldots, v_n(z)]$. Через $du_\nu(\tau)$ обозначим комплексно-нормированный базис абелевых дифференциалов I рода на R, а через $d\omega_{zz_0}(\tau)$ — обладающий нулевыми A-периодами абелев дифференциал III рода (по τ) с двумя простыми полюсами в точках $\tau = z$ и $\tau = z_0$ с вычетами в них, равными $+1$ и -1 соответственно [8]. Разрывным аналогом ядра Коши на R служит выражение $d\hat\omega_{zz_0}(\tau) = \int\limits_{z_0}^{z} d_\chi [d\omega_{\chi z_0}(\tau)]$ [4]. Зададим на R сложный кусочно-гладкий контур Γ. На множестве точек $\{\Gamma\}$ контура Γ зададим дивизор Λ так, что множество $\Gamma \setminus \Lambda$ распадается на конечное число связных компонент $\{\Gamma_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, каждая из которых есть гладкая открытая ориентированная жорданова кривая, гомеоморфная интервалу $(0, 1)$. На каждой кривой $\overline{\Gamma}_j$ ($\overline{\Gamma}_j$ — замыкание Γ_j) заданы невырожденная H-непрерывная квадратная матрица-функция $G_j(t)$ размерности n и H-непрерывный вектор-столбец $g_j(t)$. Полагая $\alpha(t, \Gamma_j) = \delta_{kj}$ при $t \in \Gamma_k$ $(k, j = 1, 2, \ldots, N$; δ_{kj} — символ Кронекера), обозначим $G(t) = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha(t, \Gamma_j) G_j(t)$, $t \in \Gamma \setminus \Lambda$. Вектор $g_j(t)$ вводится таким же образом. Пусть Δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — дивизоры, заданные на $R \setminus \Gamma$. Обозначим через Δ вектор-дивизор (строку): $\Delta = [\Delta_1, \ldots, \Delta_n]$, а через $\Delta^{(-1)}$ — вектор-дивизор (столбец): $\Delta^{(-1)} = \begin{bmatrix} \Delta_1^{(-1)} \\ \cdots \\ \Delta_n^{(-1)} \end{bmatrix}$.