УДК 517.524

Д. И. Боднар, Х. И. Кучминская

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В СООТВЕТСТВУЮЩУЮ ВЕТВЯЩУЮСЯ ЦЕПНУЮ ДРОБЬ

В настоящее время в теории приближений функций многих переменных для получения дробно-рациональных аппроксимаций находят широкое применение ветвящиеся цепные дроби [3], которые оказались удобными и при практических вычислениях на ЭВМ [4] благодаря свойству малого накопления относительной погрешности.

Предметом наших исследований будут соответствующие ветвящиеся цепные дроби для действительной аналитической функции от двух действительных переменных.

Определение. Ветвящаяся цепная дробь (ВЦД) называется соответствующей двойному степенному ряду, если разложение ее произвольной n-й подходящей дроби в двойной степенной ряд совпадает с исходным рядом до членов степени n включительно.

Пусть в области $D \subset R^2$ функция $f(x, y)$ представима в виде ряда $f(x, y) = 1 + \sum\limits_{i+j \geqslant 1} a_{ij} x^i y^j$. Тогда соответствующую ВЦД можно записать в виде

$$1 + \Phi_0(x, y) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{ii}xy\,|}{|\,1 + \Phi_i(x, y)}, \quad \Phi_i = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{c_{n+1,n}x\,|}{|\,1} + \sum_{n=i}^{\infty} \frac{c_{n,n+1}y\,|}{|\,1}, \qquad (1)$$

коэффициенты c_{ik} которой однозначно определяются по коэффициентам a_{ik} [5].

Подходящей дробью n-го порядка ВЦД (1) называется выражение

$$\frac{P_n}{Q_n} = 1 + \Phi_0^{(n)}(x, y) + \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{c_{ii}xy\,|}{|\,1 + \Phi_i^{(n-2i)}(x, y)}, \qquad (2)$$

где

$$\Phi_i^{(k)} = \sum_{p=i}^{k} \frac{c_{p+1,i}x\,|}{|\,1} + \sum_{p=i}^{k} \frac{c_{i,p+1}y\,|}{|\,1}, \quad \Phi_i^{(0)} = 0.$$

Дробь (1) называется сходящейся в точке (x_0, y_0), если существует и конечен предел $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x_0, y_0)/Q_n(x_0, y_0)$. Естественным образом можно ввести понятие равномерной сходимости.

При введении обозначений

$$Q_i^{(s-2i)} = 1 + \Phi_i^{(s-2i)} + \sum_{j=i+1}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{c_{jj}xy\,|}{|\,1 + \Phi_j^{(s-2i)}(x, y)} \qquad (3)$$

справедливо рекуррентное соотношение

$$Q_i^{(s-2i)} = 1 + \Phi_i^{(s-2i)} + \frac{c_{i+1,i+1}xy}{Q_{i+1}^{(s-2i-2)}}.$$

Используя методику работы [2], легко найти формулу разности двух подходящих дробей r-го и m-го ($r < m$) порядков:

$$\frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_m}{Q_m} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} (-1)^i \frac{\left(\Phi_i^{(r-2i)} - \Phi_i^{(m-2i)}\right) \prod\limits_{j=1}^{i} c_{jj} (xy)^i}{\prod\limits_{j=1}^{i} Q_j^{(r-2j)} \prod\limits_{j=1}^{i+1} Q_j^{(m-2j)}} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]+1} \prod\limits_{j=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]+1} c_{jj} (xy)^{\left[\frac{r}{2}\right]+1}}{\prod\limits_{j=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]} Q_j^{(r-2j)} \prod\limits_{j=1}^{\left[\frac{r}{2}\right]+1} Q_j^{(m-2j)}}. \tag{4}$$

Теорема. Ветвящаяся цепная дробь (1) равномерно сходится в каждой ограниченной области из R^2, если:

1. Существуют константа β $\left(0 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{8}\right)$ и полином $P_k(i) = A_k i^k + A_{k-1} i^{k-1} + \ldots + A_0$ такие, что выполняются условия

$$c_{i+j,i} x + \beta > 0; \quad c_{i,i+j} y + \beta > 0; \quad c_{ii} xy + \beta > 0; \tag{5}$$

$$\max\left(|c_{i+1,i}|, \ |c_{i,i+1}|\right) \leqslant |P_k(i)|. \tag{6}$$

2. Для произвольного i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi_n(i)$ расходятся, где

$$\pi_n(i) = \min\left\{\frac{1}{|c_{n+i,i}|}, \ \frac{1}{|c_{i,n+i}|}, \ \frac{1}{|c_{nn}|}\right\}.$$

Доказательство. Для получения оценки сверху модуля разности подходящих дробей r-го и m-го порядков необходимо предварительно доказать некоторые неравенства:

$$\left|\frac{c_{jj} xy}{Q_j^{(s-2j)}}\right| \leqslant \frac{L^*}{L^* + \pi_j^*} \left|1 + \Phi_{j-1}^{(s-2j-2)} + \frac{c_{jj} xu}{Q_j^{(s-2j)}}\right|, \tag{7}$$

где $S = m$ или r; $L^* = \dfrac{2}{1 - 8\beta + \sqrt{(1-4\beta)(1-8\beta)}}$; $\pi_j^* = \dfrac{1}{|c_{jj} xy|}$.

Действительно, учитывая условия теоремы (подробнее см. [1]), получаем

$$1 + \Phi_j^{(k)} \geqslant 1 - \cfrac{2\beta}{1 - \cfrac{\beta}{1 - \cfrac{\beta}{1 - \ddots}}} = \sqrt{1 - 4\beta}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots; \ k = 1, 2, \ldots$$

Тогда

$$\frac{c_{jj} xy}{\left(1 + \Phi_{j-1}^{(s-2j)}\right)\left(1 + \Phi_j^{(s-2j-2)}\right)} \geqslant \frac{-\beta}{1 - 4\beta} = -\alpha;$$

$$\left|\frac{c_{jj} xy}{Q_j^{(s-2j)}}\right| \pi_j^* = \frac{1}{|Q_j^{(s-2j)}|} =$$

$$= \frac{1}{|1 + \Phi_j^{(s-2j)}|} \, \frac{1}{\left|1 + \sum\limits_{i=j+1}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \dfrac{c_{ii} xy / \left(1 + \Phi_{i-1}^{(s-2i)}\right)\left(1 + \Phi_i^{(s-2i-2)}\right)|}{|1\cdot}\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{1-4\beta}} \, \cfrac{1}{1 - \cfrac{\alpha}{1 - \cfrac{\alpha}{1 - \ddots}}} = \frac{2}{\sqrt{1-4\beta} + \sqrt{1-8\beta}}.$$

С другой стороны,

$$\left|1+\Phi_{j-1}^{(s-2j+2)}+\frac{c_{jj}xy}{Q_j^{(s-2j)}}\right|-\left|\frac{c_{jj}xy}{Q_j^{(s-2j)}}\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left(1-\cfrac{2\beta}{1-\cfrac{\beta}{1-\cfrac{\beta}{1-\ddots}}}\right)\left(1-\cfrac{2\alpha}{1-\cfrac{\alpha}{1-\cfrac{\alpha}{1-\ddots}}}\right)=\sqrt{1-4\beta}\sqrt{1-4\alpha}=$$

$$=\sqrt{1-8\beta}.$$

Таким образом,

$$\pi_j^*\left|\frac{c_{jj}xy}{Q_j^{(s-2j)}}\right|\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-4\beta}+\sqrt{1-8\beta}}=$$

$$=L^*\sqrt{1-8\beta}\leqslant L^*\left(\left|1+\Phi_{j-1}^{(s-2j+2)}+\frac{c_{jj}xy}{Q_j^{(s-2j)}}\right|-\left|\frac{c_{jj}xy}{Q_j^{(s-2j)}}\right|\right),$$

что и доказывает неравенство (7).

$$|\Phi_i^{(r-2i)}-\Phi_i^{(m-2i)}|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{1+\sqrt{1-4\beta}}\left\{|c_{i+1,i}x|\prod_{j=2}^{r-2i+1}\frac{L}{L+\nu_{ji}}+|c_{i,i+1}y|\prod_{j=2}^{r-2i+1}\frac{L}{L+\nu_{ij}}\right\},\qquad(8)$$

где $\nu_{ji}=\frac{1}{|xc_{i+j,i}|}$; $\nu_{ij}=\frac{1}{|yc_{i,i+j}|}$; $L=\frac{2}{1-4\beta+\sqrt{1-4\beta}}$; $\nu_{r-2i,i}=$ $=\nu_{r-2i+2,i}=\nu_{i,r-2i}=\nu_{i,r-2i+2}=0$.

Введем сокращенные обозначения

$$Q_{1j}^{(s-2i)}=1+\sum_{p=j+1}^{s-2i}\frac{c_{i+p,i}x|}{|1},\quad Q_{2j}^{(s-2i)}=1+\sum_{p=j+1}^{s-2i}\frac{c_{i,i+p}y|}{|1},$$

$$j=1,\ 2,\ \ldots,\ s-2i.$$

Тогда по аналогии с тем, как были получены формулы разности между подходящими дробями в работе [2], установим, что

$$|\Phi_i^{(m-2i)}-\Phi_i^{(r-2i)}|\leqslant\frac{\prod_{j=1}^{r-2i+1}|c_{i+j,i}x^{r-2i+1}|}{\left|\prod_{j=1}^{r-2i}Q_{1j}^{(r-2i)}\prod_{j=1}^{r-2i+1}Q_{1j}^{(m-2i)}\right|}+\frac{\prod_{j=1}^{r-2i+1}|c_{i,i+j}y^{r-2i+1}|}{\left|\prod_{j=1}^{r-2i}Q_{2j}^{(r-2i)}\prod_{j=1}^{r-2i+1}Q_{2j}^{(m-2i)}\right|}.$$

Используя рекуррентные соотношения

$$Q_{1j-1}^{(s-2i)}=1+\frac{c_{i+j,i}x}{Q_{1j}^{(s-2i)}};\quad Q_{2j-1}^{(s-2i)}=1+\frac{c_{i,i+j}y}{Q_{2j}^{(s-2i)}},$$

оценки

$$\left|\frac{c_{i+j,i}x}{Q_{1j-1}^{(s-2i)}Q_{1j}^{(s-2i)}}\right|\leqslant\frac{L}{L+\nu_{ji}};\quad\left|\frac{c_{i,i+j}y}{Q_{2j-1}^{(s-2i)}Q_{2j}^{(s-2i)}}\right|\leqslant\frac{L}{L+\nu_{ij}}$$

доказываем таким же образом, как и неравенство (7).

Для завершения доказательства неравенства (8) заметим, что

$$\frac{1}{|Q_{1j}^{(s)}|}\leqslant\cfrac{1}{1-\cfrac{\beta}{1-\cfrac{\beta}{1-\ddots}}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-4\beta}}.$$

Поскольку ВЦД рассматривается в ограниченной области, то существует такая положительная константа M, что $|x| < M$ и $|y| < M$. Пусть $M_l \overset{df}{=} \max \{|c_{l+1,l}|, |c_{l,l+1}|\}$. Тогда, учитывая неравенства (7) и (8), оценим модуль разности подходящих дробей r-го и m-го порядков:

$$\left| \frac{P_r}{Q_r} - \frac{P_m}{Q_m} \right| \leqslant \frac{4M^3 |c_{11}|}{\left(1 + \sqrt{\frac{1-8\beta}{1-4\beta}}\right)(1 + \sqrt{1-4\beta})} \sum_{l=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} M_l \prod_{j=2}^{l} \frac{L^*}{L^* + \pi_j^*} \times$$

$$\times \left(\prod_{j=2}^{r-2l+1} \frac{L}{L + \nu_{jl}} \prod_{j=2}^{r-2l+1} \frac{L}{L + \nu_{lj}} \right) + \frac{|c_{11}| M^2}{1 + \sqrt{\frac{1-8\beta}{1-4\beta}}} \prod_{j=2}^{\left[\frac{r}{2}\right]+1} \frac{L^*}{L^* + \pi_j^*}. \quad (9)$$

Правая часть неравенства (9) согласно условиям теоремы равномерно стремится к нулю, так как $\prod_{i=1}^{\infty} \frac{a}{a + b_i} = 0$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \infty \quad (a > 0;\ b_i > 0)$.

Рассмотрим два возможных случая: а) существует бесконечное количество b_i, ограниченных снизу некоторым числом $b_0 > 0$; б) случай «а» не имеет места, т. е. $\lim\limits_{i \to \infty} b_i = 0$.

В случае «а» имеем

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a}{a + b_i} \leqslant \left(\frac{a}{a + b_0} \right)^{f(n)},$$

где $f(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $f(n) \leqslant n$.

В случае «б» существует константа b такая, что $b_i \leqslant b$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Поэтому

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a}{a + b_i} \leqslant \exp\left(-\frac{1}{a + b} \sum_{i=1}^{n} b_i \right).$$

Следовательно, первое слагаемое правой части (9) будет стремиться к нулю, поскольку $p(r) q^{-g(r)} \to 0$ при $r \to \infty$, где $p(r)$ — произвольный полином фиксированной степени; $g(r) \to \infty$ при $r \to \infty$; $0 < q < 1$.

Отметим, что полученный результат переносится на случай функции более чем двух переменных. Возникающие при этом трудности имеют технический характер.

1. *Боднар Д. И.* Аналог признака сходимости Ворпицкого для ветвящихся цепных дробей.— В кн.: Математический сборник, 1976. Киев : Наук. думка, 1976, с. 40—43.
2. *Боднар Д. И., Олексив И. Я.* О сходимости ветвящихся цепных дробей с неотрицательными членами.— УМЖ, 1976, 28, № 3, с. 373—377.
3. *Боднарчук П. І., Скоробогатько В. Я.* Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування.— К. : Наук. думка, 1974.— 271 с.
4. *Кучминская X. И., Боднар Д. И.* Вычислительная устойчивость разложения функций многих переменных в ветвящиеся цепные дроби.— Однород. вычислит. и интегрирующие структуры, 1977, вып. 8, с. 145—151.
5. *Кучминская X. И.* Соответствующая и присоединенная ветвящиеся цепные дроби для двойного степенного ряда.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1977, № 7, с. 614—617.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила в редколлегию 17.07.78