

$$- Y_1(l_3 Pd) R_1 J_1(l_4 Pd) + \frac{x_1}{K_R} [J_1(l_3 Pd) Y_1(l_4 Pd) - Y_1(l_3 Pd) J_1(l_4 Pd)] \Bigg\};$$

$$\eta_1 R_1 = l_1 Pd; \quad \eta_1 R_2 = l_2 Pd; \quad \eta_2 R_1 = l_3 Pd; \quad \eta_2 R_2 = l_4 Pd; \quad \sigma_l = \sigma_{ll}/\beta_2 t_0;$$

$$l = r, \varphi, z.$$

Формулы (11) позволяют для различных конкретных случаев изучать динамические температурные напряжения на стыке разнородных элементов составного цилиндра, подвергнутого гармоническому тепловому воздействию по боковой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коляно Ю. М., Иванык Е. Г. Периодическое температурное поле в составном цилиндре.— ФХОМ, 1976, № 6, с. 45—49.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. К., «Наук. думка», 1970. 307 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.XII 1976 г.

УДК 550.344

Ю. П. Стародуб

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭХО-СИГНАЛА ОТ УПРУГОЙ СФЕРЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЖЕСТКОЙ ГРАНИЦЕЙ

В работе [2] дано решение задачи нахождения эхо-сигнала от сферы в жидком бесконечном пространстве. В работе [3] предложен метод последовательных приближений с использованием мнимого изображения для нахождения эхо-сигнала от сферы в твердом полупространстве с жесткой границей. На основе указанных методов получено решение задачи определения эхо-сигнала от сферы в упругом полупространстве.

Точечный источник И генерируют центросимметрические сферические волны давления (рисунок)

$$p_l(l, \tau) = p_* l_0 l^{-1} \sin [\omega_* (\tau - l)] [H(\tau - l) - H(\tau - l - \tau_*)], \quad (1)$$

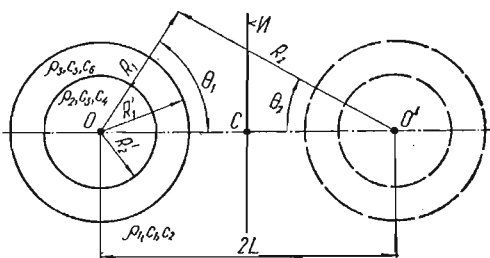
где $l = L/R_1'$; $\tau = c_1 t/R_1'$; $l_0 = L_0/R_1'$; $\tau_* = c_1 t_*/R_1'$; p_* — постоянная, имеющая размерность давления; ω_* — частота синусоидальных колебаний; L — длина радиус-вектора, измеряемого от центра источника до точки C ; L_0 — расстояние от точки C до центра объекта; R_1' — наружный радиус сферического объекта; t — время, отсчитываемое с момента включения источника; t_* — временная длительность падающего импульса; c_1 — скорость продольных звуковых волн в упругой среде; H — единичная функция Хевисайда.

Применив преобразование Фурье

$$A^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2)$$

и теорему сложения для сферических функций Бесселя к (1), для спектральной плоскости импульса получим

$$p_l^F(l, \omega) = p_* \sum_{m=0}^{\infty} g_m(\omega) j_m(\omega l) P_m(\cos \Theta_1), \quad (3)$$



где

$$\begin{aligned}
 g_m(\omega) &= i\omega l_0 f^F(\omega) (2m+1) h_m(\cos\theta_0); \\
 f^F(\omega) &= f_1(\omega) + if_2(\omega); \\
 f_1(\omega) &= \frac{\cos[(\omega - \omega_*)\tau_*]}{2(\omega - \omega_*)} - \frac{\cos[(\omega + \omega_*)\tau_*]}{2(\omega + \omega_*)} - \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_*^2}; \\
 f_2(\omega) &= \frac{\sin[(\omega - \omega_*)\tau_*]}{2(\omega - \omega_*)} - \frac{\sin[(\omega + \omega_*)\tau_*]}{2(\omega + \omega_*)}; \\
 h_m &= j_m + in_m;
 \end{aligned}$$

j_m, n_m — сферические функции Бесселя и Неймана m -го порядка; Θ_1 — угол: $(L^\wedge R_1)$ (см. рисунок); P_m — полином Лежандра m -го порядка.

Сферическая оболочка, заполнитель и внешнее полупространство характеризуются соответствующими значениями плотности ρ_k , скорости распространения продольной c_{2k-l} и поперечной c_{2k} волн или плотностью ρ_k , модулем Юнга E_k и коэффициентом Пуассона ν_k ($k = 1, 2, 3$).

Вектор смещения точек в полупространстве \vec{u}_1 определяется совместным интегрированием уравнений движения

$$\rho u_k = E_k \frac{1 - \nu_k}{(1 - 2\nu_k)(1 + \nu_k)} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} u_k) - E_k \frac{1}{2(1 + \nu_k)} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u}_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где \vec{u}_2, \vec{u}_3 — векторы смещения в оболочке и в заполнителе.

Исходными являются

а) начальные условия при $\tau < 0$:

$$u_k = \frac{\partial u_k}{\partial \tau} = 0;$$

б) условия контакта при возбуждении источником:

$$(\vec{u}_u - \vec{u}_1)_{r=l} = 0, \quad [\sigma_{ij} - p_i(l, \tau)]_{r=l} = 0, \quad r_1 = R_1/R'_1, \quad (5)$$

где \vec{u}_u, σ_{ij} — вектор смещения и напряжение в среде, вызываемое воздействием источника условия на наружной и внутренней поверхностях оболочки:

$$\begin{aligned}
 (\vec{u}_u + \vec{u}_1 - \vec{u}_2)_{r=l} &= 0; \quad (\vec{u}_2 - \vec{u}_3)_{r=l=r_2} = 0; \\
 (-\sigma_{uij} + \sigma_{1ij} - \sigma_{2ij})_{r=l} &= 0; \quad (\sigma_{2ij} - \sigma_{3ij})_{r=l=r_2} = 0; \\
 i, j &= 1, 2, 3, \quad r'_2 = R'_2/R'_1,
 \end{aligned} \quad (6)$$

σ_{xij} ($x = 1, 2, 3$) — напряжения в полупространстве оболочки и заполнителя; условие на жесткой границе: $\vec{u}_1 = 0$;

в) условие излучения:

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} r_1 \left(\frac{\partial}{\partial r_1} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \vec{u}_1 = 0; \quad (7)$$

г) условие ограниченности решения: \vec{u}_k ограничены там, где они определены.

Задачу выгодно решать для потенциалов движения в сферических координатах. Поэтому, сделав в выражениях (4) — (7) замену

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla} \times \vec{\psi}$$

и воспользовавшись выражением (2), получим

$$\begin{aligned}
 \left(\nabla^2 - \frac{1}{r_1^2 \sin^2 \Theta} + \omega_{2k-1}^2 \right) \Psi_k^F &= 0, \\
 (\nabla^2 + \omega_{2k}^2) \Phi_k^F &= 0,
 \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\omega_{2k} = \omega/c_{2k}, \quad \omega_{2k-1} = \omega/c_{2k-1}, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1^2 \frac{\partial}{\partial r_1} \right) + \frac{1}{r_1^2 \sin \Theta_1} \frac{\partial}{\partial \Theta_1} \left(\sin \Theta_1 \frac{\partial}{\partial \Theta_1} \right).$$

Решение уравнений (8) ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_k^F(r_1, \Theta_1, \omega) &= R_1^2 \sum_{m=0}^{\infty} [a_{mk}(\omega) j_m(\omega_{2k-1} r_1) + b_{mk}(\omega) n_m(\omega_{2k-1} r_1)] \times \\ &\quad \times g_m(\omega) P_m(\cos \Theta_1), \\ \Psi_k^F(r_1, \Theta_1, \omega) &= R_1^2 \sum_{m=0}^{\infty} [c_{mk}(\omega) j_m(\omega_{2k} r_1) + d_{mk}(\omega) n_m(\omega_{2k} r_1)] \times \\ &\quad \times g_m(\omega) P_m(\cos \Theta_1), \\ P_m(\cos \Theta_1) &= \frac{\partial}{\partial \Theta} P_m(\cos \Theta). \end{aligned} \quad (9)$$

Из условия (6) следует, что $b_{m1} = ia_{m1}$, $c_{m1} = id_{m1}$. Поскольку n_m обращаются в бесконечность при $r_1 = 0$, то $b_{m3} = d_{m3} = 0$.

Воспользуемся уравнением для функций j_m и n_m и свойством ортогональности для p_m [2]. Подставив (9) в (6), для определения a_{m1} и c_{m1} получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A_{j1} a_{m2} + A_{j2} b_{m2} + A_{j3} c_{m2} + A_{j4} d_{m2} + A_{j5} a_{m1} + A_{j6} a_{m3} + A_{j7} c_{m1} + \\ + A_{j8} c_{m3} = A_{j0}, \quad j = 1, \dots, 8, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= \omega_3^2 \left[\frac{v_2}{1-2v_2} j_m(\omega_3) - j'_m(\omega_3) \right]; \quad A_{12} = \omega_3^2 \left[\frac{v_2}{1-2v_2} n_m(\omega_3) - n'_m(\omega_3) \right]; \\ A_{13} &= m(m+1) [j_m(\omega_4) - \omega_4 j'_m(\omega_4)]; \quad A_{14} = m(m+1) [n_m(\omega_4) - \omega_4 n'_m(\omega_4)]; \\ A_{15} &= \omega_1^2 \left[\frac{v_2}{1-2v_2} h_m(\omega_1) - h''_m(\omega_1) \right]; \quad A_{16} = 0; \quad A_{17} = -m(m+1) [h_m(\omega_2) - \\ &- \omega_2 h'_m(\omega_2)]; \quad A_{18} = 0; \quad A_{10} = -V_m(\omega) \{ h_m(\omega_1) [m(m+1)(c_1^2 - 2c_2^2) - \\ &- \alpha^2 \omega_1^2] + 2c_2^2 h'_m(\omega_1) \} - W_m(\omega) 2c_2^2 m(m+1) [h_m(\omega_2) + h'_m(\omega_2)]; \\ A_{21} &= 2 [j_m(\omega_3) - \omega_3 j'_m(\omega_3)]; \quad A_{22} = 2 [n_m(\omega_3) - \omega_3 n'_m(\omega_3)]; \\ A_{23} &= 2\omega_4 j'_m(\omega_4) + [\omega_4^2 - 2m(m+1) + 2] j_m(\omega_4); \quad A_{24} = 2\omega_4 n'_m(\omega_4) + \\ &+ [\omega_4^2 - 2m(m+1) + 2] n_m(\omega_4); \quad A_{25} = \omega_1 h'_m(\omega_1) - h_m(\omega_1); \\ A_{26} &= 0; \quad A_{27} = -\omega_2 h'_m(\omega_2) - \left[\frac{\omega_2^2 - (m^2 + m - 2)}{2} \right] h_m(\omega_2); \quad A_{28} = 0; \\ A_{20} &= V_m(\omega) 2 [h_m(\omega_1) - h'_m(\omega_1)] + \omega_m(\omega) [h_m(\omega_2) (\omega_2^2 - 2) - 2h'_m(\omega_2)]; \\ A_{31} &= \omega_3 j'_m(\omega_3); \quad A_{32} = \omega_3 n'_m(\omega_3); \quad A_{33} = m(m+1) j_m(\omega_4); \\ A_{34} &= m(m+1) h_m(\omega_2); \quad A_{35} = \omega_1 h'_m(\omega_1); \quad A_{36} = 0; \quad A_{37} = -m(m+1) \times \\ &\times h_m(\omega_2); \quad A_{38} = 0; \quad A_{30} = V_m(\omega) \frac{m}{2m+1} h'_m(\omega_1) + W \frac{m^2(m+1)}{2m+1} \times \\ &\times h_m(\omega_2); \quad A_{41} = j_m(\omega_3); \quad A_{42} = n_m(\omega_3); \quad A_{43} = \omega_4 j_m(\omega_4) + j'_m(\omega_4); \\ A_{44} &= \omega_4 n'_m(\omega_4) + n_m(\omega_4); \quad A_{45} = -h_m(\omega_1); \quad A_{46} = 0; \\ A_{47} &= -\omega_2 h'_m(\omega_2) - h_m(\omega_2); \quad A_{48} = 0; \quad A_{40} = V_m(\omega) h_m(\omega_1) - W_m(\omega) \times \\ &\times [h_m(\omega_2) + h'_m(\omega_2)]; \quad A_{51} = -2r_2 \omega_3 j'_m(r_2 \omega_3) + \left[(r_2 \omega_3)^2 \frac{3v_2 - 1}{1 - 2v_2} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m(m+1) \Big] j_m(r_2' \omega_3); \quad A_{52} = 2r_2' \omega_3 n_m'(r_2' \omega_3) + (r_2' \omega_3)^2 \left[\frac{1 - \nu_2}{1 - 2\nu_2} - \right. \\
& \left. - m(m+1) \right] n_m(r_2 \omega_3); \quad A_{53} = m(m+1) [j_m(r_2 \omega_4) - r_2' \omega_4 j_m'(r_2 \omega_4)]; \\
A_{54} & = m(m+1) [n_m(r_2 \omega_4) - r_2' \omega_4 n_m'(r_2 \omega_4)]; \quad A_{55} = 0; \quad A_{56} = -2r_2' \omega_6 \times \\
& \times j_m'(r_2' \omega_6) - \left[(r_2' \omega_6)^2 \frac{1 - \nu_2}{1 - 2\nu_2} - m(m+1) \right] j_m(r_2' \omega_6); \quad A_{57} = 0; \\
A_{58} & = [(r_2' \omega_6)^2 - 2m(m+1)] j_m(r_2' \omega_6) + 2(r_2' \omega_6) j_m'(r_2' \omega_6); \quad A_{59} = 0; \\
A_{61} & = 2[j_m(r_2' \omega_3) - r_2' \omega_3 j_m'(r_2' \omega_3)]; \quad A_{62} = 2[n_m(r_2' \omega_3) - r_2' \omega_3 n_m'(r_2' \omega_3)]; \\
A_{63} & = [(r_2' \omega_4)^2 - 2m(m+1) + 2] j_m(r_2' \omega_4) + 2r_2' \omega_4 j_m'(r_2' \omega_4); \\
A_{64} & = 2r_2' \omega_4 n_m'(r_2' \omega_4) + [(r_2' \omega_4)^2 - 2m(m+1) + 2] n_m(r_2 \omega_4); \quad A_{65} = 0; \\
A_{66} & = -2[j_m(r_2' \omega_6) - r_2' \omega_6 j_m'(r_2' \omega_6)]; \quad A_{67} = 0; \quad A_{68} = -2r_2' \omega_6 j_m'(r_2' \omega_6); \\
A_{69} & = 0; \quad A_{71} = r_2' \omega_3 j_m'(r_2' \omega_3); \quad A_{72} = r_2' \omega_3 n_m'(r_2' \omega_3); \quad A_{73} = m(m+1) j_m(r_2' \omega_4); \\
A_{74} & = m(m+1) n_m(r_2' \omega_4); \quad A_{75} = 0; \quad A_{76} = -r_2' \omega_6 j_m'(r_2' \omega_6); \quad A_{77} = 0; \\
A_{78} & = -m(m+1) j_m(r_2' \omega_6); \quad A_{79} = 0; \quad A_{81} = -j_m(\omega_3 r_2); \\
A_{82} & = -n_m(\omega_3 r_2); \quad A_{83} = -r_2 \omega_4 j_m(\omega_4 r_2) - j_m(\omega_4 r_2); \\
A_{84} & = -\omega_4 r_2 n_m'(\omega_4 r_2) - n_m(\omega_4 r_2); \quad A_{85} = 0; \quad A_{86} = j_m(\omega_5 r_2); \\
A_{87} & = 0; \quad A_{88} = \omega_6 r_2 j_m(\omega_6 r_2) + j_m(\omega_6 r_2); \quad A_{89} = 0; \\
V_m(\omega) & = \frac{-F_m C_m}{A_m D_m - B_m C_m}; \quad W_m(\omega) = \frac{F_m D_m}{A_m D_m - B_m C_m}; \\
A_m & = 2c_2^2 m(m+1) \left[h_m(\omega_2 l) \frac{1}{l^2} + h_m'(\omega_2 l) \frac{1}{l} \right]; \\
B_m & = \frac{1}{l^2} [(c_1^2 - 2\beta^2) m(m+1) - c_1^2 (\omega_1 l)^2] h_m(\omega_1 l) + h_m'(\omega_1 l) \frac{2\beta^2}{l}; \\
C_m & = h_m(\omega_2 l) \left(\frac{2}{l} - \omega_2^2 l \right) + 2h_m'(\omega_2 l); \quad D_m = -\frac{2}{l} h_m(\omega_1 l) + 2h_m'(\omega_1 l); \\
F_m & = \rho_* j_m^-(\omega l); \quad l = \sqrt{l_0^2 + l_1^2}.
\end{aligned}$$

Функции $a_{m1}(\omega)$ и $c_{m1}(\omega)$ определяются методом определителей Крамера из системы (10). Функции φ^F и ψ^F определяются по методу, предложенному в работе [3]:

$$\varphi^F = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \varphi_i^F; \quad \psi^F = \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \psi_i^F, \quad (11)$$

а φ_i^F и ψ_i^F определяются методом мнимых изображений [1] (см. рисунок):

$$\varphi_r^F = \rho_* \sum_{m=0}^{\infty} a_{m1}(\omega) h_m(\omega_1, r_r) P_m(\cos \Theta_r) g_m(\omega),$$

$$\psi_r^F = \rho_* \sum_{m=0}^{\infty} c_{m1}(\omega) h_m(\omega_2, r_r) P_m(\cos \Theta_r) g_m(\omega),$$

$$\varphi_{r+2}^F = \rho_* \sum_{m=0}^{\infty} [X_{mr} + a_{m1}(\omega) h_m(\omega_1 r_r)] P_m(\cos \Theta_r) g_m(\omega),$$

$$\psi_{r+2}^F = \rho_* \sum_{m=0}^{\infty} [Y_{mr} + c_{m1}(\omega) h_m(\omega_2 r_r)] P_m(\cos \Theta_r) g_m(\omega).$$

Коэффициенты X_{mr} и Y_{mr} определяются разложением по сферическим волнам предыдущего рассеяния:

$$X_{mr} = \frac{2m+1}{2} g_m^{-1}(\omega) \int_{-1}^{+1} P_m(\cos \Theta_r) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_{n1}(\omega) h_n(\omega_1 r_s) \times \right. \\ \left. \times P_n(\cos \Theta_s) g_n(\omega) \right] d \cos \Theta_r, \\ Y_{mr} = \frac{2m+1}{2m(m+1)} \int_{-1}^{+1} P'_m(\cos \Theta_r) \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_{n1}(\omega) h_m(\omega_2 r_s) \times \right. \\ \left. \times P'_n(\cos \Theta_s) \right] d \cos \Theta_r, \\ \cos \Theta_s = \frac{r_r \cos \Theta_r}{r_s}, \quad r_s = \left[(2l)^2 + r_r^2 - 4l r_r \cos \left(\Theta_2 - \frac{\pi}{2} \right) \right]^{1/2}, \\ s = 1, \text{ если } r = 2, \quad s = 2, \text{ если } r = 1.$$

Осуществив обратное преобразование Фурье потенциалов (11), получим их значения в зависимости от времени.

Проанализируем результаты. Положив в (10) $a_{m3} = c_{m3} = 0$, $A_{20} = A_{40} = 0$, получим уравнения, описывающие колебания идеальной жидкости. Учитывая выражения для асимптотических приближений $h_{mr \rightarrow \infty}(r)$, легко видеть, что для достаточно больших значений r_s и $2l$ из четырех слагаемых для φ и ψ остается только первое. Тогда получаем выражения для (11) из работы [2].

Расчет эхо-сигнала от сферы в полупространстве с жесткой границей можно использовать для изучения мультипольных эффектов. Задача, поставленная в полупространстве, дает возможность вводить новые параметры в решение, поскольку имеем бесконечно много точек на границе, где смещение равно нулю. Результаты могут иметь приложения в геофизике и акустике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исакович И. А. Общая акустика. М., «Наука», 1973. 496 с.
2. Нигул У. К. Эхо-сигналы от упругих объектов. Т. 2. Таллин, Изд-во АН ЭССР, 1974. 346 с.
3. Селезов І. Т., Лазаренко М. А. Розсіяння і дифракція пружних хвиль на сфері, поміщеній у півпросторі. — Допов. АН УРСР, 1966, № 2, с. 179—182.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
19.X 1976 г.