решение которого

$$\alpha = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x).$$

По начальным условиям $t = 0$, $\alpha = \alpha_0$, $\dot{\alpha}_0 = 0$ находим C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{1}{2}\pi\alpha_0 \frac{a}{\eta v_0} Y'_\nu\left(\frac{a}{\eta v_0}\right), \quad C_2 = \frac{1}{2}\pi\alpha_0 \frac{a}{\eta v_0} J'_\nu\left(\frac{a}{\eta v_0}\right).$$

На рис. 3 представлены графики $\alpha = \alpha(t)$ для случая $\eta = 0{,}01$ 1/м (кривая *1*) и $\eta = 0{,}005$ 1/м (кривая *2*) при условии, что $R = 10^4$ м, $r = 1$ м, $v_0 = 100$ м/с, $\alpha_0 = 0{,}3$ рад.

Ивано-Франковский институт нефти и газа

Поступила в редколлегию 15.X 1976 г.

УДК 539.377

Ю. М. Коляно, Е. Г. Иванык

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА, ПОДВЕРГАЕМОГО ПЕРИОДИЧЕСКОМУ ТЕПЛОВОМУ ВОЗДЕЙСТВИЮ

Рассмотрим длинный составной цилиндр радиуса R_2 с неподвижными торцами, состоящий из цилиндра радиуса R_1, сопряженного с толстостенной оболочкой из другого материала. Пусть температура свободной от внешней нагрузки поверхности $r = R_2$ изменяется во времени по периодическому закону, т. е. $t|_{r=R_2} = t_0 e^{i\omega\tau}$, $-\infty < \tau < +\infty$.

Представим физико-механические характеристики цилиндра в виде

$$p(r) = p_1 + (p_2 - p_1) S_-(r - R_1), \tag{1}$$

где p_2, p_1 — соответственно характеристики оболочки и заполнителя; $S_-(r - R_1) = \begin{cases} 1, r \geqslant R_1 \\ 0, r < R_1 \end{cases}$ — асимметричная единичная функция. Возникающее при этом периодическое температурное поле в составном цилиндре известно [1]. Обусловленные этим температурным полем напряжения определяются формулами [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu(r)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(r)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) - \beta(r)\, t(r, \tau), \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\mu(r)\frac{u}{r} + \lambda(r)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) - \beta(r)\, t(r, \tau), \\ \sigma_{zz} &= \lambda(r)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) - \beta(r)\, t(r, \tau), \end{aligned} \tag{2}$$

где $u(r, \tau)$ — радиальное перемещение, удовлетворяющее уравнению

$$\mu(r)\Delta u + [\lambda(r) + \mu(r)]\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) - \mu(r)\frac{u}{r^2} + 2\frac{\partial \mu(r)}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial \lambda(r)}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}[\beta(r)\, t(r, \tau)] = \rho(r)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}; \tag{3}$$

$\lambda(r)$, $\mu(r)$ — коэффициенты Ламе кусочно-однородного цилиндра; $\beta(r) = [3\lambda(r) + 2\mu(r)]\,\alpha_t(r)$; $\alpha_t(r)$ — температурный коэффициент линейного расширения; $\rho(r)$ — плотность.

Напряжение σ_{rr} и перемещение u должны удовлетворять граничным условиям

$$\sigma_{rr} = 0 \text{ при } r = R_2, \quad u = 0 \text{ при } r = 0. \tag{4}$$

Подставляя (1) в уравнение (3), приводим его к виду

$$\Delta u - \frac{u}{r^2} - f(r)\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \varphi(r)\frac{\partial t}{\partial r} + \left.\left(\varepsilon t - \varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\varkappa}{R_1} u\right)\right|_{r=R_1} \delta_-(r - R_1), \tag{5}$$

где

$$f(r)=f_1+(f_2-f_1)S_-(r-R_1);\quad f_i=\rho_i/(\lambda_i+2\mu_i);$$
$$\varphi(r)=\varphi_1+(\varphi_2-\varphi_1)S_-(r-R_1);\quad \varphi_i=\beta_i/(\lambda_i+2\mu_i),\quad i=1,\ 2;$$
$$\varepsilon=(\beta_2-\beta_1)/(\lambda_1+2\mu_1);\quad \varepsilon_1=(\lambda_2+2\mu_2)/(\lambda_1+2\mu_1)-1;$$
$$\varkappa=(\lambda_2-\lambda_1)/(\lambda_1+2\mu_1);\quad \delta_-(r-R_1)=\frac{dS_-(r-R_1)}{dr}.$$

Решение уравнения (5) ищем в виде

$$u(r,\tau)=U(r)e^{i\omega\tau}. \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5) для определения функции $U(r)$, получаем следующее уравнение:

$$\Delta U+\left[\frac{\omega^2}{c_1^2}+\left(\frac{\omega^2}{c_2^2}-\frac{\omega^2}{c_1^2}\right)S_-(r-R_1)-\frac{1}{r^2}\right]U=\varphi(r)\frac{d\Theta}{dr}+$$
$$+\left(\varepsilon\Theta-\varepsilon_1\frac{dU}{dr}-\frac{\varkappa}{R_1}U\right)\Big|_{r=R_1}\delta_-(r-R_1), \tag{7}$$

где $\Theta(r)$ — функция, определенная в работе [1]: $c_i^2=(\lambda_i+2\mu_i)/\rho_i$.

Аналогично работе [1] решение уравнения (7) находим в виде

$$U(r)=F_1G_J(r)+F_2G_Y(r)+\varphi(r)b(r)\frac{d\Theta}{dr}-\frac{\pi\varphi_1R_1b_1}{2}\left[\zeta_1^2\Theta|_{r=R_1}Q_{11}(r)-\right.$$
$$\left.-\eta_1\frac{d\Theta}{dr}\Big|_{r=R_1}Q_{01}(r)\right]S_+(R_1-r)-\frac{\pi\varphi_2R_1b_2}{2}\left[\zeta_2^2\Theta|_{r=R_1}Q_{12}(r)-\right.$$
$$\left.-\eta_2\frac{d\Theta}{dr}\Big|_{r=R_1}Q_{02}(r)\right]S_-(r-R_1). \tag{8}$$

Здесь

$$G_V(r)=V_1(\eta_1r)S_+(R_1-r)+\frac{\pi R_1}{2}\{[\eta_2Y_0(\eta_2R_1)V_1(\eta_1R_1)-$$
$$-\eta_1Y_1(\eta_2R_1)V_0(\eta_1R_1)]J_1(\eta_2r)+[\eta_1J_1(\eta_2R_1)V_0(\eta_1R_1)-$$
$$-\eta_2J_0(\eta_2R_1)V_1(\eta_1R_1)]Y_1(\eta_2r)\}S_-(r-R_1);$$
$$Q_{nm}(r)=J_n(\eta_mR_1)Y_1(\eta_mr)-Y_n(\eta_mR_1)J_1(\eta_mr),\quad n=0,\ 1;\quad m=1,\ 2;$$
$$b(r)=b_1+(b_2-b_1)S_-(r-R_1);$$
$$b_j=(\eta_j^2+\zeta_j^2)^{-1};\quad \eta_j^2=\omega^2/c_j^2;\quad \zeta_j^2=\frac{i\omega}{a_j},\quad j=1,\ 2;$$
$$S_+(R_1-r)=1-S_-(r-R_1);$$

$J_\nu(\eta)$, $Y_\nu(\eta)$ — функции Бесселя первого и второго рода.

Из формулы (8) следует, что

$$U|_{r=R_1}=F_1J_1(\eta_1R_1)+F_2Y_1(\eta_1R_1),$$
$$\frac{dU}{dr}\Big|_{r=R_1}=(1+\varepsilon_1)^{-1}\left\{F_1\left[\eta_1J_0(\eta_1R_1)-\frac{1+\varkappa}{R_1}J_1(\eta R_1)\right]+\right.$$
$$\left.+F_2\left[\eta_1Y_0(\eta_1R_1)-\frac{1+\varkappa}{R_1}Y_1(\eta_1R_1)\right]\right\}. \tag{9}$$

Подставляя (8) в (6) и далее в (2), получаем такие выражения температурных напряжений:

$$\sigma_{rr}=\operatorname{Re}\sigma_{rr}+i\operatorname{Im}\sigma_{rr}=\left\{[\lambda(r)+2\mu(r)]\operatorname{Re}\frac{dU}{dr}+\frac{\lambda(r)}{r}\operatorname{Re}U\right\}\cos\omega\tau-$$
$$-\left\{[\lambda(r)+2\mu(r)]\operatorname{Im}\frac{dU}{dr}+\frac{\lambda(r)}{r}\operatorname{Im}U\right\}\sin\omega\tau-\beta(r)\operatorname{Re}t+$$

$$+ i\left\langle\left\{[\lambda(r)+2\mu(r)]\,\mathrm{Im}\frac{dU}{dr}+\frac{\lambda(r)}{r}\,\mathrm{Im}\,U\right\}\cos\omega\tau+\right.$$

$$\left.+\left\{[\lambda(r)+2\mu(r)]\,\mathrm{Re}\frac{dU}{dr}+\frac{\lambda(r)}{r}\,\mathrm{Re}\,U\right\}\sin\omega\tau-\beta(r)\,\mathrm{Im}\,t\right\rangle,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\mathrm{Re}\,\sigma_{\varphi\varphi}+i\,\mathrm{Im}\,\sigma_{\varphi\varphi}=\left\{[\lambda(r)+2\mu(r)]\frac{\mathrm{Re}\,U}{r}+\lambda(r)\,\mathrm{Re}\frac{dU}{dr}\right\}\cos\omega\tau-$$

$$-\left\{[\lambda(r)+2\mu(r)]\frac{\mathrm{Im}\,U}{r}+\lambda(r)\,\mathrm{Im}\frac{dU}{dr}\right\}\sin\omega\tau-\beta(r)\,\mathrm{Re}\,t+$$

$$+i\left\langle\left\{[\lambda(r)+2\mu(r)]\frac{\mathrm{Im}\,U}{r}+\lambda(r)\,\mathrm{Im}\frac{dU}{dr}\right\}\cos\omega\tau+\left\{[\lambda(r)+2\mu(r)]\frac{\mathrm{Re}\,U}{r}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda(r)\,\mathrm{Re}\frac{dU}{dr}\right\}\sin\omega\tau-\beta(r)\,\mathrm{Im}\,t\right\rangle, \qquad (10)$$

$$\sigma_{zz}=\mathrm{Re}\,\sigma_{zz}+i\,\mathrm{Im}\,\sigma_{zz}=\lambda(r)\left[\mathrm{Re}\frac{dU}{dr}+\frac{\mathrm{Re}\,U}{r}\right]\cos\omega\tau-$$

$$-\lambda(r)\left[\mathrm{Im}\frac{dU}{dr}+\frac{\mathrm{Im}\,U}{r}\right]\sin\omega\tau-\beta(r)\,\mathrm{Re}\,t+i\left\{\lambda(r)\left[\mathrm{Im}\frac{dU}{dr}+\frac{\mathrm{Im}\,U}{r}\right]\cos\omega\tau+\right.$$

$$\left.+\lambda(r)\left[\mathrm{Re}\frac{dU}{dr}+\frac{\mathrm{Re}\,U}{r}\right]\sin\omega\tau-\beta(r)\,\mathrm{Im}\,t\right\}.$$

Отметим, что действительные и мнимые части в формулах (10) — (12) соответствуют температурным напряжениям в случае, когда температура поверхности составного цилиндра изменяется во времени соответственно в виде $t_0\cos\omega\tau$ и $t_0\sin\omega\tau$. В частности, для последнего случая напряжения на поверхности соединения $r=R_1$ имеют вид

$$\sigma_r=\left[A_1\,\mathrm{Re}\frac{dU}{dr}+A_2\frac{\mathrm{Re}\,U}{R_1}-\Omega_s\right]\sin(\mathrm{Pd\,Fo})+$$

$$+\left[A_1\,\mathrm{Im}\frac{dU}{dr}+A_2\frac{\mathrm{Im}\,U}{R_1}-\Omega_c\right]\cos(\mathrm{Pd\,Fo}),$$

$$\sigma_\varphi=\left[A_1\frac{\mathrm{Re}\,U}{R_1}+A_2\,\mathrm{Re}\frac{dU}{dr}-\Omega_s\right]\sin(\mathrm{Pd\,Fo})+\left[A_1\frac{\mathrm{Im}\,U}{R_1}+\right.$$

$$\left.+A_2\,\mathrm{Im}\frac{dU}{dr}-\Omega_c\right]\cos(\mathrm{Pd\,Fo}), \qquad (11)$$

$$\sigma_z=\left[A_2\left(\mathrm{Re}\frac{dU}{dr}+\frac{\mathrm{Re}\,U}{R_1}\right)-\Omega_s\right]\sin(\mathrm{Pd\,Fo})+$$

$$+\left[A_2\left(\mathrm{Im}\frac{dU}{dr}+\frac{\mathrm{Im}\,U}{R_1}\right)-\Omega_c\right]\cos(\mathrm{Pd\,Fo}),$$

где Ω_s, Ω_c определены в [1],

$$A_1=(\lambda_2+2\mu_2)\,\varphi_2/\beta_2;\quad A_2=\lambda_2\varphi_2/\beta_2;$$

$$\mathrm{Re}\,U=\mathrm{Re}\,F_1J_1(l_1\,\mathrm{Pd})+\mathrm{Re}\,F_2Y_1(l_1\,\mathrm{Pd});$$

$$\mathrm{Im}\,U=\mathrm{Im}\,F_1J_1(l_1\,\mathrm{Pd})+\mathrm{Im}\,F_2Y_1(l_1\,\mathrm{Pd});$$

$$\mathrm{Re}\frac{dU}{dr}=(1+\varepsilon_1)^{-1}\left\{\frac{\mathrm{Re}\,F_1}{R_1}[l_1\,\mathrm{Pd}\,J_0(l_1\,\mathrm{Pd})-(1+\varkappa)\,J_1(l_1\,\mathrm{Pd})]+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{Re}\,F_2}{R_1}[l_1\,\mathrm{Pd}\,Y_0(l_1\,\mathrm{Pd})-(1+\varkappa)\,Y_1(l_1\,\mathrm{Pd})]+\frac{\varepsilon}{\varphi_2}\,\Omega_s\right\};$$

$$\mathrm{Im}\frac{dU}{dr}=(1+\varepsilon_1)^{-1}\left\{\frac{\mathrm{Im}\,F_1}{R_1}[l_1\,\mathrm{Pd}\,J_0(l_1\,\mathrm{Pd})-(1+\varkappa)\,J_1(l_1\,\mathrm{Pd})]+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{Im}\,F_2}{R_1}[l_1\,\mathrm{Pd}\,Y_0(l_1\,\mathrm{Pd})-(1+\varkappa)\,Y_1(l_1\,\mathrm{Pd})]+\frac{\varepsilon}{\varphi_2}\,\Omega_c\right\};$$

$$\frac{\operatorname{Re} F_1}{R_1} = \Gamma_J^{-1}(\mathrm{Pd}) \left\{ \frac{l_4^2 \mathrm{Pd}^2}{1 + l_4^4 \mathrm{Pd}^2} - \frac{\operatorname{Re} F_2}{R_1} \Gamma_Y (\mathrm{Pd}) + \right.$$

$$+ \frac{\pi \varepsilon \varepsilon_1 \sqrt{K_a \mathrm{Pd}}\, L_1(\mathrm{Pd})}{2\sqrt{2}\varphi_2 \mathrm{Pd}^2 (K_a^2 + l_2^4 \mathrm{Pd}^2)} [(l_2^2 \mathrm{Pd}^2 - \mathrm{Pd}\, K_a)\, \Omega_s^{(1)} + (l_2^2 \mathrm{Pd}^2 + \mathrm{Pd}\, K_a)\, \Omega_c^{(1)}] -$$

$$- \frac{\pi \varepsilon_1 K_a L_1(\mathrm{Pd})}{2K_\varphi (K_a^2 + l_2^4 \mathrm{Pd}^2)} [K_a \Omega_s - l_2^2 \mathrm{Pd}\, \Omega_c] - \frac{\pi \varepsilon_1 L_1(\mathrm{Pd})}{2\varphi_2} \Omega_s +$$

$$+ \frac{\pi L_1(\mathrm{Pd})}{2(1 + l_4^4 \mathrm{Pd}^2)} [l_4^2 \mathrm{Pd}\, \Omega_s + \Omega_c] + \frac{(1 - \varkappa_1)\sqrt{\mathrm{Pd}}}{2\sqrt{2}\, \mathrm{Pd}^2 (1 + l_4^4 \mathrm{Pd}^2)} [(l_4^2 \mathrm{Pd} + \mathrm{Pd})\, H_s +$$

$$+ (l_4^2 \mathrm{Pd} - \mathrm{Pd})\, H_c] - \frac{\pi l_4 \sqrt{\mathrm{Pd}\, K_a}\, L_0(\mathrm{Pd})}{2\sqrt{2}(1 + l_4^2 \mathrm{Pd}^2)} [(l_4^2 \mathrm{Pd} - 1)\, \Omega_s^{(1)} +$$

$$\left. + (l_4^2 \mathrm{Pd} + 1)\, \Omega_c^{(1)}] \right\};$$

$$\frac{\operatorname{Im} F_1}{R_1} = \Gamma_J^{-1}(\mathrm{Pd}) \left\{ - \frac{l_4^2 \mathrm{Pd}}{1 + l_4^4 \mathrm{Pd}} - \frac{\operatorname{Im} F_2}{R_1} \Gamma_Y (\mathrm{Pd}) + \right.$$

$$+ \frac{\pi \varepsilon \varepsilon_1 \sqrt{K_a \mathrm{Pd}}\, L_1(\mathrm{Pd})}{2\sqrt{2}\varphi_2 \mathrm{Pd}^2 (K_a^2 + l_2^4 \mathrm{Pd}^2)} [(l_2^2 \mathrm{Pd}^2 - \mathrm{Pd}\, K_a)\, \Omega_c^{(1)} - (l_2^2 \mathrm{Pd}^2 + \mathrm{Pd}\, K_a)\, \Omega_s^{(1)}] -$$

$$- \frac{\pi \varepsilon_1 K_a L_1(\mathrm{Pd})}{2K_\varphi (K_a^2 + l_2^4 \mathrm{Pd}^2)} [K_a \Omega_c + l_2^2 \mathrm{Pd}\, \Omega_s] - \frac{\pi \varepsilon L_1(\mathrm{Pd})}{2\varphi_2} \Omega_c +$$

$$+ \frac{\pi L_1(\mathrm{Pd})}{2(1 + l_4^4 \mathrm{Pd}^2)} [l_4^2 \mathrm{Pd}\, \Omega_c - \Omega_s] + \frac{(1 - \varkappa_1)\sqrt{\mathrm{Pd}}}{2\sqrt{2}\, \mathrm{Pd}^2 (1 + l_4^4 \mathrm{Pd}^2)} [(l_4^2 \mathrm{Pd} - \mathrm{Pd})\, H_s -$$

$$- (l_4^2 \mathrm{Pd} + \mathrm{Pd})\, H_c] - \frac{\pi l_4 \sqrt{\mathrm{Pd}\, K_a}\, L_0(\mathrm{Pd})}{2\sqrt{2}(1 + l_4^4 \mathrm{Pd}^2)} [(l_4^2 \mathrm{Pd} - 1)\, \Omega_c^{(1)} -$$

$$\left. - (l_4^2 \mathrm{Pd} + 1)\, \Omega_s^{(1)}] \right\};$$

$$\frac{\operatorname{Re} F_2}{R_1} = \frac{\pi K_a J_1(l_1 \mathrm{Pd})(K_a \Omega_s - l_2^2 \mathrm{Pd}\, \Omega_c)}{2K_\varphi (l_2^4 \mathrm{Pd}^2 + K_a^2)} - \frac{\pi l_2 \sqrt{\mathrm{Pd}\, K_a}\, J_0(l_1 \mathrm{Pd})}{2\sqrt{2} K_\varphi (l_2^4 \mathrm{Pd}^2 + K_a^2)} [(l_2^2 \mathrm{Pd} -$$

$$- K_a)\, \Omega_s^{(1)} + (l_2^2 \mathrm{Pd} + K_a)\, \Omega_c^{(1)}];$$

$$\frac{\operatorname{Im} F_2}{R_1} = \frac{\pi K_a J_1(l_1 \mathrm{Pd})(K_a \Omega_c + l_2^2 \mathrm{Pd}\, \Omega_s)}{2K_\varphi (l_2^4 \mathrm{Pd}^2 + K_a^2)} - \frac{\pi l_2 \sqrt{\mathrm{Pd}\, K_a}\, J_0(l_1 \mathrm{Pd})}{2\sqrt{2} K_\varphi (l_2^4 \mathrm{Pd}^2 + K_a^2)} [(l_2^2 \mathrm{Pd} -$$

$$- K_a)\, \Omega_c^{(1)} + (l_2^2 \mathrm{Pd} + K_a)\, \Omega_s^{(1)}];$$

$$\left.\frac{d\Theta}{dr}\right|_{r=R_1} = \Omega_s + i\Omega_c; \quad \left.\frac{d\Theta}{dr}\right|_{r=R_2} = H_s + iH_c; \quad \varkappa_1 = \lambda_2/(\lambda_2 + 2\mu_2);$$

$$L_j(\mathrm{Pd}) = R_1 [J_j(l_3 \mathrm{Pd})\, Y_1'(l_4 \mathrm{Pd}) - Y_j(l_3 \mathrm{Pd})\, J_1'(l_4 \mathrm{Pd})] + \frac{\varkappa_1}{K_R} [J_1(l_3 \mathrm{Pd}) \times$$

$$\times Y_1(l_4 \mathrm{Pd}) - Y_j(l_3 \mathrm{Pd})\, J_1(l_4 \mathrm{Pd})], \quad j = 0,\ 1; \quad K_\varphi = \varphi_2/\varphi_1;$$

$$\Gamma_V(\mathrm{Pd}) = \frac{\pi}{2} \Big\langle [l_3 \mathrm{Pd}\, Y_0(l_3 \mathrm{Pd})\, V_1(l_1 \mathrm{Pd}) - l_1 \mathrm{Pd}\, Y_1(l_3 \mathrm{Pd})\, V_0(l_1 \mathrm{Pd})] \times$$

$$\times \left[l_3 \mathrm{Pd}\, J_0(l_4 \mathrm{Pd}) + \frac{\varkappa_1 - 1}{K_R} J_1(l_4 \mathrm{Pd}) \right] + [l_1 \mathrm{Pd}\, J_1(l_3 \mathrm{Pd})\, V_0(l_1 \mathrm{Pd}) -$$

$$- l_3 \mathrm{Pd}\, J_0(l_3 \mathrm{Pd})\, V_1(l_1 \mathrm{Pd})] \left[l_3 \mathrm{Pd}\, Y_0(l_4 \mathrm{Pd}) + \frac{\varkappa_1 - 1}{K_R} Y_1(l_4 \mathrm{Pd}) \right] -$$

$$- \frac{\pi}{2} [\varepsilon_1 l_1 \mathrm{Pd}\, V_0(l_1 \mathrm{Pd}) + (\varkappa - \varepsilon_1)\, V_1(l_1 \mathrm{Pd})] \Big\{ [J_1(l_3 \mathrm{Pd})\, R_1 Y_1'(l_4 \mathrm{Pd}) -$$

$$-Y_1(l_3 \mathrm{Pd}) R_1 J_1(l_4 \mathrm{Pd})] + \frac{\varkappa_1}{K_R}[J_1(l_3 \mathrm{Pd}) Y_1(l_4 \mathrm{Pd}) - Y_1(l_3 \mathrm{Pd}) J_1(l_4 \mathrm{Pd})]\Big\}\Big\rangle;$$

$$\eta_1 R_1 = l_1 \mathrm{Pd}; \quad \eta_1 R_2 = l_2 \mathrm{Pd}; \quad \eta_2 R_1 = l_3 \mathrm{Pd}; \quad \eta_2 R_2 = l_4 \mathrm{Pd}; \quad \sigma_l = \sigma_{ll}/\beta_2 t_0;$$
$$l = r, \ \varphi, \ z.$$

Формулы (11) позволяют для различных конкретных случаев изучать динамические температурные напряжения на стыке разнородных элементов составного цилиндра, подвергнутого гармоническому тепловому воздействию по боковой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коляно Ю. М., Иванык Е. Г.* Периодическое температурное поле в составном цилиндре.— ФХОМ, 1976, № 6, с. 45—49.
2. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. К., «Наук. думка», 1970. 307 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
12.XII 1976 г.

УДК 550.344

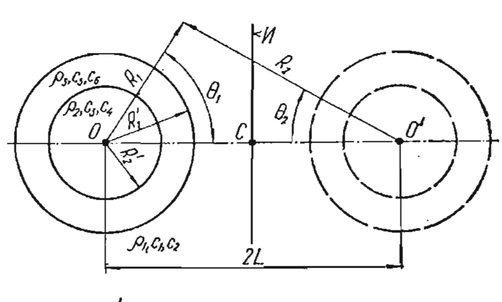
Ю. П. Стародуб

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭХО-СИГНАЛА ОТ УПРУГОЙ СФЕРЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ЖЕСТКОЙ ГРАНИЦЕЙ

В работе [2] дано решение задачи нахождения эхо-сигнала от сферы в жидком бесконечном пространстве. В работе [3] предложен метод последовательных приближений с использованием мнимого изображения для нахождения эхо-сигнала от сферы в твердом полупространстве с жесткой границей. На основе указанных методов получено решение задачи определения эхо-сигнала от сферы в упругом полупространстве.

Точечный источник И генерируют центросимметрические сферические волны давления (рисунок)

$$p_i(l, \tau) = p_* l_0 l^{-1} \sin[\omega_*(\tau - l)][H(\tau - l) - H(\tau - l - \tau_*)], \tag{1}$$



где $l = L/R_1'$; $\tau = c_1 t/R_1'$; $l_0 = L_0/R_1'$; $\tau_* = ct_*/R_1'$; p_* — постоянная, имеющая размерность давления; ω_* — частота синусоидальных колебаний; L — длина радиус-вектора, измеряемого от центра источника до точки C; L_0 — расстояние от точки C до центра объекта; R_1' — наружный радиус сферического объекта; t — время, отсчитываемое с момента включения источника; t_* — временная длительность падающего импульса; c_1 — скорость продольных звуковых волн в упругой среде; H — единичная функция Хевисайда.

Применив преобразование Фурье

$$A^F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{i\omega\tau} d\tau, \quad i = \sqrt{-1}, \tag{2}$$

и теорему сложения для сферических функций Бесселя к (1), для спектральной плоскости импульса получим

$$p_i^F(l, \omega) = p_* \sum_{m=0}^{\infty} g_m(\omega) j_m(\omega l) P_m(\cos\Theta_1), \tag{3}$$