УДК 550.344

Р. С. Починайко

К МЕТОДИКЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СЕЙСМОАКУСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СРЕДЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ НАБЛЮДЕНИЙ НА ЕЕ ПОВЕРХНОСТИ

Основной задачей физической интерпретации результатов сейсмоакустических исследований является получение максимально точной научно обоснованной информации о строении и составе среды, содержащейся в зарегистрированных полях сейсмоакустических параметров. Решение этой проблемы встречается с некорректностью обратных задач, которая состоит в нарушении хотя бы одного из трех условий: существование решения задачи, его единственности и устойчивости решения относительно возмущения входных данных. Требование надежности интерпретации приводит к постановке задачи о выборе некоторого приближения z из класса структур Z, которое при заданном u_0 из класса экспериментальных входных данных U удовлетворяет условиям единственности и требованию [5]

$$M^{1/2}[z] \equiv \|A(z) - u_0\|_U \leqslant \delta, \tag{1}$$

где A — оператор прямого соответствия $z \rightarrow u$; $M^{1/2}[z]$ — как правило, среднеквадратическое отклонение указанных величин; δ — соответствующая ему мера погрешности входных данных. В зависимости от способа выбора приближения, удовлетворяющего условию (1), различают два пути преодоления некорректности задач геофизической интерпретации. Первый путь — это подбор структуры в рамках заданного компакта $M \subset Z$, где можно достичь устойчивости, при условии (1). Его математическое обоснование приводится в работах [2 и др.]. Характерным для этого пути есть введение в постановку задачи априорной информации о структуре в виде ограничений на переменные параметры структуры [6]. Успех и качество интерпретации зависят от того, насколько принятые ограничения адекватны исследуемой структуре. Второй путь базируется на методе регуляризации [3, 4] и связан с использованием качественной информации о структуре, которая определяется, хотя количественные ограничения ее параметров могут использоваться с целью повышения точности интерпретации. В основе предложенного в работе [5] регуляризующего алгоритма решения задач геофизической интерпретации, связанных с нелинейным оператором соответствия $A(z)$, который не обязательно задается в явной форме, лежит процесс минимизации «сглаживающего» параметрического функционала Тихонова:

$$F_\alpha[z] = M[z] + \alpha\Omega[z], \tag{2}$$

где «регуляризатор» $\Omega[z]$ таков, что $\overline{Z} = \{z : \Omega[z] \leqslant C\}$ есть компакт в Z. Условие $\min \Omega(z)$ является формализацией имеющихся качественных сведений о структуре. Например, если для данной задачи интерпретации априорным требованием является максимальная гладкость приближения $z \equiv z(x)$, $x \in [a, b]$, то регуляризующий функционал принимает вид

$$\Omega[z] = \int_b^a [z'(x)]^2\,dx. \tag{3}$$

Отметим, что, как правило, $\Omega[z]$ — квадратический функционал вида $\Omega[z] = \|z - z_0\|_Z^2$, $z_0 \in Z$ [1, 3, 4 и др.]. Если задаться некоторой последовательностью значений параметра регуляризации $\{\alpha_p\} \rightarrow 0$, $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (пусть для определенности $\alpha_{p+1} = \mu\alpha_p$, $\mu < 1$), то можно получить последовательность значений $\{z^{\alpha_p}\}$, реализующих нижнюю грань (2). В качестве начального приближения процесса минимизации при $\alpha = \alpha_p$

выбирается $z^{\alpha_p - 1}$. Если при этом α_0 достаточно велико, то z^{α_0} достаточно близко к z_0. Из последовательности $\{z^{\alpha_p}\}$ можно выбрать элемент с наименьшим номером p, удовлетворяющий условию (1). Следует отметить, что в практической реализации предложенный регуляризующий алгоритм вследствие соответствующих разностных аппроксимаций приводит к устойчивому решению в итерационном цикле системы линейных алгебраических уравнений — операции, стандартной для ЭВМ.

Процесс физической интерпретации сейсмоакустических исследований в первом приближении состоит в создании скоростной модели исследуемой среды $v(x, y, z)$, которая соответствует волновому полю $A(x, y, x_0, y_0, t)$, регистрируемому на поверхности наблюдений (здесь A — амплитуда колебаний на плоскости наблюдений x, y; x_0, y_0 — координаты источника; t — время). Отсутствие строгого решения обратной динамической задачи сейсмоакустики для сложно построенных сред привело к созданию многочисленных приближенных методов интерпретации материалов наблюдений на поверхности. Поскольку прямая задача может быть решена для широкого круга сред, а в кинематической постановке ее возможности почти неограничены, то обратную задачу обычно решают путем сопоставления расчетных сигналов или их годографов с наблюденными. Это привело к естественному развитию способов подбора сейсмического разреза по наблюдаемому волновому полю. Такой путь дает возможность учитывать все разнообразие волн, их кинематические и динамические особенности, вводить в рассмотрение геологическую информацию. Методом последовательных приближений возможен учет особенностей волновых полей, наблюдаемых на поверхности, и тем самым сокращение области возможной многозначности решения.

Рассмотрим методику решения обратных задач. Постановку обратной задачи сейсмоакустики можно сформулировать следующим образом: даны полученные в результате наблюдений параметры упругих волн; необходимо найти значения упругих характеристик среды, удовлетворяющие этим наблюдениям. Обычно ищут разрез: зависимость определенной характеристики среды от расстояния r до плоскости наблюдений или центра Земли. Однако из-за погрешности регистрации мы получаем не один, а некоторое множество разрезов, для которых теоретически рассчитанные параметры сейсмоакустических волн совпадают с зарегистрированными в пределах погрешности наблюдений. Разрезы этого множества могут по некоторым признакам существенно различаться между собой, но отдельные черты у них будут общими. Эти общие черты являются искомыми характеристиками исследуемой среды. Таким образом, задача сводится к отысканию множества разрезов, удовлетворяющих наблюдениям, и к определению их общих свойств [1].

Исходя из вышеизложенного можно наметить следующую схему решения обратной задачи сейсмоакустики. Сначала искомый разрез параметризуется, т. е. представляется в виде функции от r, зависящей от параметров. Поскольку вид функции задается, то определение разреза сводится к нахождению числовых значений параметров. При этом желательно указать возможные границы области изменения параметров, т. е. область, в которой лежит истинный разрез. С помощью регуляризации по Тихонову определяется множество разрезов, удовлетворяющих условию (1).

Для параметризации разрез разбивается на слои и аппроксимируется внутри каждого слоя отдельно. Количество параметров, задающих разрез в слоях, зависит от вида аппроксимирующей функции, причем значения r на границах относятся к числу параметров, определяющих разрез. Для обеспечения корректности параметризации, необходимо последнюю согласовать с физической задачей и с исходными наблюдениями. Например, если физической задачей является выяснение существования определенных элементов разреза (волновода и т. п.), то принятая параметризация должна допускать разрезы как с этими особенностями, так и без них. При этом вероятность встретить данную особенность при случайном выборе разреза должна быть близкой к 1/2. Выбор параметров будет оптимальным, если параметры по возможности связаны с исходными наблюдениями и различные параметры или их группы существенно зависят от различных частей исходных наблюдений. Количество неизвестных параметров должно быть минимальным, но таким, чтобы можно было выполнить условия корректности. Значит, для корректной и оптимальной параметризации очень важно заблаговременно исследовать, с какими свойствами разреза могут быть связаны различные особенности наблюдаемых данных.

При поиске разреза, согласующегося с исходными наблюдениями, необходимо также выяснить, в каком смысле понимается согласование и расхождение наблюдений с теоретическими данными, рассчитанными для каждого конкретного разреза. Определение меры расхождения проводится в три этапа. На первом этапе из наблюдений выбираются величины Y_k для непосредственного сравнения с расчетами. На втором этапе определяются меры расхождения каждой из отобранных на первом этапе величин. В качестве меры выбирается порог c_k и такой функционал σ_k, величина которого мала для близких кривых и велика для кривых, сильно отличающихся между собой, например среднеквадратическое отклонение. Если значение функционала больше порогового значения c_k, то можно считать, что теоретическая кривая не согласуется с наблюдаемой. Кроме того, функционал σ_k должен содержать весовую функцию $\delta_k(x_l)$, учитывающую точность наблюдений Y_k и точность расчетов y_k в точках x_l. На третьем этапе выбираются мера σ суммарного расхождения всех использованных наблюдений с расчетами и пороговое значение c для этой меры. Величина σ есть функция всех мер, избранных на втором этапе, в простейшем случае — их линейная комбинация $\sum\limits_k a_k\sigma_k$. Если σ меньше порогового значения c, то считается, что расчеты совпали с наблюдениями. Оптимальным будет такой выбор σ, при котором его значение мало изменяется при вариации наблюдаемых величин в пределах их погрешностей и сильно изменяется только при существенных вариациях свойств разреза, которые нас интересуют. Оптимальное значение c должно быть больше вариации σ за счет погрешностей в наблюдениях и неточности в аппроксимации разреза и меньше изменения σ за счет существенных вариаций разреза.

Поскольку теоретические значения характеристик сейсмоакустических волн y_k являются функцией параметров разреза, то σ тоже зависит от последних. После построения сглаживающего функционала F_α наша обратная задача может быть сформулирована так: задано конечную область изменения неизвестных параметров разреза и способ вычисления функционала F_α; требуется отыскать значения параметров разреза, реализующих нижнюю грань F_α. Оптимальным является такой метод поиска, который дает нужный результат после вычисления функции в наименьшем числе точек. Обычно используется не один метод, а комбинация нескольких, например выбор точки с минимальным значением σ путем нескольких проб методом Монте-Карло с дальнейшим градиентным спуском с этой точки. Для каждой конкретной задачи оптимальный метод выбирается самостоятельно.

Подводя итог вышесказанному о методике решения обратных задач сейсмоакустики, можно сделать следующие выводы: 1) задача состоит в построении модели среды, а также разрезов ее параметров по зарегистрированному волновому полю; 2) она относится к некорректно поставленным задачам и для удовлетворения условиям корректности ее необходимо регуляризировать; 3) эффективность рассматриваемой методики повышается в результате использования регуляризующих алгоритмов; 4) существует целый ряд методов решения обратных задач, но наиболее распространенной является методика, предусматривающая использование решения прямой задачи для проведения оценки точности решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбель И. Я., Кейлис-Борок В. И., Яновская Т. Б.* Методика совместной интерпретации годографов и амплитудных кривых при изучении верхней мантии.— Машин. интерпретация сейсм. волн. Вычисл. сейсмология, 1966, вып. 2, с. 3—45.
2. *Тихонов А. Н.* Об устойчивости обратных задач.— Докл. АН СССР, 1943, **39**, № 5, с. 195—198.
3. *Тихонов А. Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации.— Докл. АН СССР, 1963, **151**, № 3, с. 501—504.
4. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач.— Докл. АН СССР, 1963, **153**, № 1, с. 49—52.
5. *Тихонов А. Н., Гласко В. Б.* О применении метода регуляризации в задачах геофизической интерпретации.— Изв. АН СССР. Физика Земли, 1975, № 1, с. 38—47.
6. *Яновская Т. Б.* Вычисление скоростных разрезов верхней мантии по годографу сейсмических волн, как обратная математическая задача.— Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1963, № 8, с. 1171—1177.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

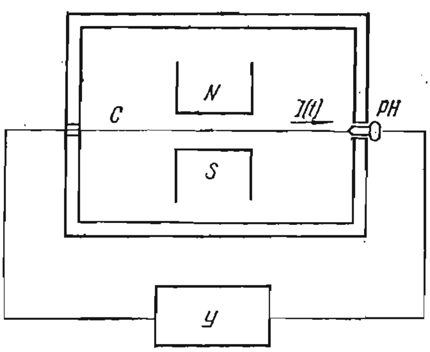
Поступила в редколлегию
20.X 1976 г.

УДК 517.94:519.21

Н. А. Михацкий, В. П. Рубаник

СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СТРУННОМ ГЕНЕРАТОРЕ

Реальные технические системы, в том числе системы управления и колебательные системы, почти всегда подвержены воздействию случайных возмущений. Эти случайные возмущения могут быть обусловлены случайными возмущениями параметров системы, внутренними шумами в системе (тепловой, дробовой и фликкерные шумы в радиоэлектронных устройствах и др.), внешними случайными возмущениями. Наличие случайных возмущений колебательной системы приводит к флуктуациям амплитуды, фазы и частоты колебательной системы.



Исследованию флуктуаций в простейших линейных и нелинейных колебательных системах посвящено много работ [2, 7 и др.]. В данной работе сделана попытка исследования случайных колебаний в более сложной колебательной системе, содержащей звено с распределенными параметрами и звено с запаздыванием.

Рассмотрим флуктуации автоколебаний в струнном генераторе с учетом запаздывания в усилителе и резонансов между собственными частотами. Схема генератора изображена на рисунке (С — струна; PH — регулятор натяжения струны; N, S — полюсы магнита; У — усилитель).

В работе [6] рассмотрены многочастотные детерминированные колебания в указанном генераторе. Здесь рассмотрим одно- и многочастотные случайные колебания, которые приближенно описываются уравнениями

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \frac{2\varepsilon h_0}{\rho}\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho}\,F(x)\,I(t) + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\rho}\,\Phi(x)\,\dot{W}(t), \qquad (1)$$

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + 2\lambda\,\frac{dI(t)}{dt} + kI(t) = \frac{dY(t-\Delta)}{dt},$$

$$Y(t) = h_1 E(t) - h_2 E^3(t), \quad E(t) = \int_0^l F(x)\,\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\,dx \qquad (2)$$