

Так как $\frac{\partial \psi_l}{\partial t} = O\left(\frac{1}{R}\right)$ при достаточно больших R , то второй интеграл в (13) справа стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Убедимся, что тогда и первый интеграл в (13) справа также стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Действительно, в противном случае правая часть (13) сохраняла бы знак для произвольных t и достаточно больших R , а левая, как легко проверить [1], оказалась бы знакопеременной.

Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} J(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial t} J_R(t) = 0, \quad (14)$$

где $J(t)$ получаем из (12) заменой Ω_R на Ω_1 .

Интегрируя (14) по t в пределах от 0 до t , получаем

$$J(t) - J(0) = 0. \quad (15)$$

Но начальные условия (4) и выражения для тензора деформаций $\varepsilon_{ke} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_e} + \frac{\partial v_e}{\partial x_k} \right)$ дают $J(0) = 0$. Поэтому (15) сводится к $J(t) = 0$, откуда следует, что $\psi_l(t, x) = \frac{\partial \psi_l}{\partial t} = p_l(t, x) \equiv 0$ в Ω_l , $\vec{v}(t, x) \equiv 0$ в V .

По известной схеме отсюда получаем единственность решения задачи о взаимодействии гладкой упругой оболочки с акустическими средами, возникающего под воздействием внутренних источников колебаний с непрерывно распределенными плотностями и непрерывного начального возмущения в момент $t = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Купрадзе В. Д. Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963. 472 с.
2. Нигул У. К., Метсавээр Я. А., Векслер Н. Д., Кутсер М. Э. Эхо-сигналы от упругих объектов. Таллин, Изд-во АН ЭССР, 1974. 345 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. М., «Мир», 1975. 872 с.

Львовский университет

Поступила в редколлегию
30.IV 1976 г.

УДК 533.6.013.42

Г. И. Калита

ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ В ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОЕ КОЛЕБАНИЯМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассмотрим задачу о движении идеальной жидкости, в которую погружена круговая цилиндрическая оболочка бесконечной длины при действии на оболочку некоторой заданной нагрузки. Колебания оболочки и движение жидкости будем считать установившимися.

Движение оболочки толщиной h в цилиндрической системе координат (r, θ) описывается уравнениями [1]

$$\begin{aligned} (k^2 + 1) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + k^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} &= 0, \\ k^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \frac{\partial v}{\partial \theta} + k^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + w + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \frac{1 - \nu^2}{E} R^2 \bar{p} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где R — радиус кривизны срединной поверхности; \bar{p} — полное давление, действующее на оболочку; w, v — перемещения оболочки в нормальном и тангенциальном направлениях; $k^2 = \frac{h^2}{12R^2}$; $\tau = \frac{c_1 t}{R}$ — безразмерное время; $c_1^2 = \frac{E}{\rho_0(1 - \nu^2)}$; ρ_0 — плотность материала оболочки; E, ν — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала оболочки.

Введением в рассмотрение скалярной функции $\Phi(\theta, \tau)$

$$\omega = (k^2 + 1) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2},$$

$$v = -k^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^3} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}$$
(2)

система (1) сводится к одному дифференциальному уравнению

$$k^2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \theta^6} + 2k^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \theta^4} + k^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - k^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \tau^2 \partial \theta^4} + (k^2 + 1) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \tau^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} +$$

$$+ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \tau^4} = \frac{1 - v^2}{Eh} R^2 \bar{p}.$$
(3)

Будем считать, что жидкость в невозмущенном состоянии находится в покое. Гидродинамическое давление определяется соотношениями [2]

$$p = -\rho \frac{c_1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau},$$
(4)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2},$$
(5)

где φ — потенциал скоростей; ρ — плотность жидкости; $\bar{r} = \frac{c_1}{c} \frac{r}{R}$ — безразмерный радиус; c — скорость звука в жидкости. Задача сводится к решению системы уравнений (3), (5) при

1) условиях контакта на поверхности оболочки

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{\bar{r}=\lambda},$$
(6)

где $\lambda = \frac{c_1}{c}$;

2) условиях ограниченности решения: функции p , φ , Φ приобретают конечные значения в областях, где они определены.

Уравнения (3), (5) связаны между собой, так как нагрузка \bar{p} , действующая на оболочку, состоит из некоторого заданного, приложенного к оболочке давления p^i и гидродинамического давления жидкости p :

$$\bar{p} = p^i + p \Big|_{\bar{r}=\lambda}.$$
(7)

Определим гидродинамическое давление в жидкости, используя разложение потенциала φ , давления \bar{p} и функции Φ по системе ортогональных функций:

$$\varphi = e^{i\omega\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cos n\theta, \quad p = e^{i\omega\tau} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cos n\theta,$$

$$\Phi = e^{i\omega\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n \cos n\theta, \quad p^i = e^{i\omega\tau} \sum_{n=0}^{\infty} p_n^i \cos n\theta.$$
(8)

Подставляя (8) в волновое уравнение (5) и в уравнение (3) и удовлетворяя условиям «1», «2», получаем решение задачи

$$\varphi_n = A_n K_n(i\omega \bar{r}),$$
(9)

$$p_n = -\frac{\rho c_1}{R} i\omega A_n K_n(i\omega \bar{r}),$$
(10)

$$\Phi_n = -\frac{1 - v^2}{Eh} R^2 \frac{p_n + p_n^i}{k^2 n^6 - 2k^2 n^4 + k^2 n^2 - k^2 n^4 + \omega^2 - (k^2 + 1) \omega^2 n^2 - \omega^4},$$
(11)

где

$$A_n = -\frac{R}{\rho c_1} \frac{[(k^2 + 1) n^2 - \omega^2] p_n^i}{-i\omega [(k^2 + 1) n^2 - \omega^2] K_n(i\omega \lambda) + \frac{\lambda}{\eta} k \sqrt{12} B_n K_n'(i\omega \lambda)};$$
(12)

$$\eta = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \lambda = \frac{c_1}{c};$$

$$B_n = k^2 n^6 - 2k^2 n^4 + k^2 n^2 - k^2 n^4 + \omega^2 - (k^2 + 1) \omega^2 n^2 - \omega^4; \quad (13)$$

$$K_n(i\omega\lambda) = -\frac{in}{\omega\lambda} K_n(i\omega\lambda) - K_{n+1}(i\omega\lambda);$$

$K_n(i\omega\lambda)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода; p_n^t — коэффициенты разложения в ряд функций, которые задают конкретный вид нагружающего давления p^t .

Рассмотрим примеры определения гидродинамического давления в жидкости p для трех различных видов нагрузки p^t на оболочку [3]:

$$1. p^t = p_0 e^{i\omega\tau} \delta(\theta),$$

где δ — дельта-функция Дирака. Учитывая разложение дельта-функции в ряд

$$\delta(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\theta, \quad (14)$$

где

$$b_0 = \frac{1}{2}, \quad b_n = 1, \quad n \geq 1,$$

получаем

$$p_n^t = \frac{p_0}{\pi} b_n. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (10) и (12), получаем значение давления p для данной нагрузки.

$$2. p^t = p_0 e^{i\omega\tau} \begin{cases} \cos \theta & \text{для } |\theta| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{для } \frac{\pi}{2} < |\theta| < \pi. \end{cases}$$

Аналогично предыдущему примеру представляем функцию

$$f(\theta) = \begin{cases} \cos \theta & \text{для } |\theta| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{для } \frac{\pi}{2} < |\theta| < \pi \end{cases}$$

в виде ряда

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2 - 1} \cos 2k\theta.$$

Находим

$$p_n^t = p_0 b_n,$$

где

$$b_n = \begin{cases} b_0 = \frac{1}{\pi} \\ b_1 = 0 \\ b_{2k} = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{4k^2 - 1}, \quad k = 1, \infty. \end{cases}$$

3. Перемещающаяся нагрузка

$$p^t = p_0 p^t(\theta - \omega\tau). \quad (16)$$

Предположим, что потенциал Φ , давление p и функцию Φ можно разложить в ряды Фурье

$$\Phi = \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_n e^{in(\theta - \omega\tau)}, \quad p = \sum_{-\infty}^{\infty} p_n e^{in(\theta - \omega\tau)}, \quad (17)$$

$$\Phi = \sum_{-\infty}^{\infty} \Phi_n e^{in(\theta - \omega\tau)}, \quad p^t = \sum_{-\infty}^{\infty} p_n^t e^{in(\theta - \omega\tau)}.$$

Тогда решение задачи будет иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi_n &= A_n K_n(i\omega \bar{r}), \\ p_n &= \frac{\rho c_1}{R} i\omega n A_n K_n(i\omega \bar{r}), \\ \Phi_n &= -\frac{1-\nu^2}{Eh} R^2 \frac{p_n + p'_n}{B_n}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$A_n = -\frac{Rc_1}{\rho} \frac{[(k^2 + 1)n^2 - \omega^2 n^2] p'_n}{i\omega [(k^2 + 1)n^2 - \omega^2 n^2] K_n(i\omega n) + \frac{\lambda}{\eta} k \sqrt{12} B_n K'_n(i\omega n)}; \quad (19)$$

$$B_n = k^6 n^6 + 2k^2 n^4 - k^2 n^2 + k^2 \omega^2 n^6 + (k^2 + 1)\omega^2 n^2 + \omega^2 n^2 + \omega^4 n^4. \quad (20)$$

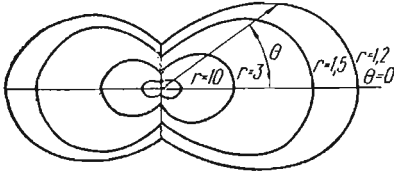


Рис. 1

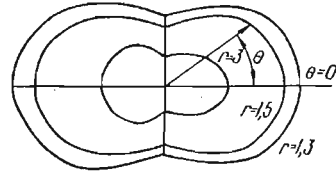


Рис. 2

Если к оболочке, например, приложена движущаяся сосредоточенная сила

$$p^t = \rho_0 \delta(\theta - \omega\tau),$$

то, учитывая разложение δ -функции в ряд Фурье

$$\delta(\theta - \omega\tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in(\theta - \omega\tau)},$$

получаем

$$p'_n = \frac{\rho_0}{2\pi}.$$

Получены числовые результаты для первых двух рассмотренных примеров. Расчет производился на ЭВМ «Минск-32» с удержанием различного числа членов ряда для таких данных:

$$k' = \frac{h}{R} = \frac{1}{8}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = 7,8, \quad \frac{c}{c_1} = 0,3, \quad \nu = 0,3.$$

Начиная с $n > 7$ формулы (9) — (12) практически дают одинаковые результаты

На рис. 1, 2 представлены графики распределения гидродинамического давления $\frac{|p|}{\rho_0}$ в жидкости вокруг оболочки на различных расстояниях от оболочки. Максимальные значения давления принимает на линии $\theta = 0$ в случае точечной нагрузки на оболочку (рис. 1) и на линии $\theta = \pi$ в случае распределенной нагрузки (рис. 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Избранные труды. Т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
2. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. Л., «Судостроение», 1974. 208 с.
3. Payton R. G. Dynamic membrane stresses in a circular elastic shell.— J. Appl. Mech., 1961, 28, N 3, p. 417—420.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию
20.1 1977 г.