а температурное поле имеет вид (14), то решение для нулевого приближения (20) записывается в следующем виде:

$$\sigma_r^{(0)} = \frac{2(2\nu-1)(1+\nu)G^*}{(1-\nu)\rho^3}\left\{\frac{\gamma}{k_1}\left[0{,}1\mathrm{Ki}\rho^3(1-\rho^2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\mathrm{Ki}}{\mu_n^4\cos\mu_n}\exp(-\mu_n^2\mathrm{Fo})\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\sin\mu_n\rho}{\mu_n} - \rho\cos\mu_n\rho\right)\right] + \frac{k_1+\gamma}{k_1}\left[\int_0^\rho \eta^2 t^* d\eta - \rho^3\int_0^1 \eta^2 t^* d\eta\right]\right\},$$

$$\sigma_\varphi^{(0)} = \sigma_\theta^{(0)} = \frac{(2\nu-1)(1+\nu)G^*}{1-\nu}\left[t^*\left(1+\frac{\gamma}{2}t^*\right) + \frac{3\gamma\mathrm{KiFo}}{k_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{3(k_1+\gamma)}{k_1}\int_0^1 \eta^2 t^* d\eta\right] - \frac{\sigma_r^{(0)}}{2}, \qquad (24)$$

где $k_1 = 0{,}132$; $\gamma = 0{,}554$; $\beta = 0{,}125$; $\nu = 0{,}4$.

По формулам (24) при $\rho = 0$, $\mathrm{Ki} = 1$, $\mathrm{Fo} = 0{,}4$ произведены расчеты температурных напряжений в термочувствительной сфере. При этом $\sigma_r^{(0)}|_{\rho=0} = 0{,}121$; $\sigma_\varphi^{(0)}|_{\rho=0} = \sigma_\theta^{(0)}|_{\rho=0} = 0{,}213$. Значения этих напряжений для нетермочувствительной сферы соответственно равны 0,097 и 0,19. Последующие приближения практически не оказывают влияния на величину температурных напряжений в центре сферы. Таким образом, учет зависимости физико-механических характеристик материала от температуры приводит к увеличению радиальных и кольцевых напряжений в центре сферы соответственно на 25 и 12%.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. М., «Высш. школа», 1967. 599 с.
2. *Новинский А.* Задача о переходной термоупругости бесконечной среды со сферической полостью и свойствами, зависящими от температуры.— Прикл. математика, 1962, **29**, № 2, с. 197—205.
3. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., «Наук. думка», 1972. 308 с.

Львовский филиал математической физики
Института математики АН УССР

Поступила в редколлегию 20.I 1977 г.

УДК 539.370

Т. Л. Мартынович, М. К. Зварич, В. С. Щукин

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ БАЛКИ-ПЛАСТИНКИ, В ОТВЕРСТИЕ КОТОРОЙ ВПРЕССОВАН УПРУГИЙ СТЕРЖЕНЬ

Рассмотрим упругое равновесие анизотропной балки-пластинки шириной $2h_0$, толщиной $2h$ и длиной l, ослабленную круговым отверстием радиуса r_1, в которое впрессовано упругое изотропное кольцо (стержень) постоянного сечения, симметричного относительно срединной плоскости пластинки xoy. Предполагаем, что пластинка имеет в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости xoy. Контакт между телами осуществляется вдоль всего контура отверстия L. Трением между пластинкой и кольцом пренебрегаем. Напряженно-деформированное состояние кольца описывается теорией тонких криволинейных стержней.

При определении напряженного состояния в контактирующих телах будем исходить из граничных условий в интегральной форме [2]. В этом случае задача сводится к нахождению функций $\Phi_j(z_j)$ комплексных переменных $z_j = x + \mu_j y$, аналитических в областях S_j ($j = 1, 2$) [1, 3], и компонент деформации стержня e_0 и θ_b.

Положив $z = r_1\zeta$ и $t = r_1\sigma$, получим, что функции

$$z_j = \frac{r_1}{2}\left[(1 - i\mu_j)\zeta_j + (1 + i\mu_j)\zeta_j^{-1}\right] \quad (j = 1,\ 2) \tag{1}$$

конформно переводят соответствующие области S_j на внешность единичного круга γ. При этом для точек окружности γ переменные ζ, ζ_1 и ζ_2 принимают одно и то же значение $\sigma = e^{i\theta}$.

Граничные условия рассматриваемой задачи в преобразованной области запишутся в виде

$$\begin{gathered}
\int\limits_\gamma \operatorname{Re} UF(\sigma)\,d\sigma = \int\limits_\gamma [u_{1u} + \varepsilon^*(\sigma)]\,F(\sigma)\,d\sigma,\\
\int\limits_\gamma V\overline{F'(\sigma)}\,d\bar{\sigma} = -r_1\int\limits_\gamma N^{(l)}\overline{F(\sigma)}\,d\sigma + \Delta_1,\\
\int\limits_\gamma VF'(\sigma)\,d\sigma = -r_1\int\limits_\gamma N^{(l)}F(\sigma)\,d\sigma + \Delta_2,
\end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\begin{gathered}
U = \sigma^{-1}\sum_{j=1}^{2}\left[(p_j + iq_j)\,\Phi_j(\sigma) + (\bar{p}_j + i\bar{q}_j)\,\overline{\Phi_j(\sigma)}\right];\\
V = \sum_{j=1}^{2}\left[(1 + i\mu_j)\,\Phi_j(\sigma) + (1 + i\bar{\mu}_j)\,\overline{\Phi_j(\sigma)}\right];
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\Delta_1 = -\{V\overline{F(\sigma)}\}_\gamma; \quad \Delta_2 = -\{VF(\sigma)\}_\gamma; \tag{4}$$

ε^* — нормальная величина скачка вектора перемещения; μ_j, p_j и q_j — постоянные величины, зависящие от упругих постоянных материала пластинки [1].

Произвольную функцию $F(\zeta)$ и комплексные потенциалы $\Phi_j(\zeta_j)$ представим в виде рядов

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n\zeta^{-n}, \tag{5}$$

$$\Phi_j(\zeta_j) = \Phi_j^*(\zeta_j) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(j)}\zeta_j^{-k} \quad (j = 1,\ 2). \tag{6}$$

Здесь $\Phi_j^*(\zeta_j)$ — известные функции, через которые выражаются компоненты напряжений, возникающих в сплошной балке-пластинке (без отверстия) [1, 3].

Компоненты деформации кольца e_0 и θ_b представим на γ в форме комплексных рядов Фурье

$$e_0 = \alpha_0 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sigma^k, \quad \theta_b = \beta_0 + 2\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sigma^k. \tag{7}$$

Контактное напряжение вдоль линии соприкасания пластинки с кольцом $N^{(l)}$ вычисляется по формуле

$$N^{(l)} = \frac{g}{2hr_1}\left[\alpha_0 + \sum_{k=2}^{\infty}(1 - k^2)(\alpha_k\sigma^k + \bar{\alpha}_k\sigma^{-k})\right], \tag{8}$$

где $g = E^*F$ — жесткость стержня на растяжение.

Нормальную составляющую перемещения u_{1n} контурных точек кольца, согласно работе [2], представим в виде ряда

$$u_{1n} = r_0\left[\alpha_0 + \left(1 + \frac{r_0}{\eta_c}\right)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{1 - k^2}(\alpha_k\sigma^k + \bar{\alpha}_k\sigma^{-k})\right]. \tag{9}$$

Подставляя (5), (6), (8) и (9) в граничные условия (2) и используя соответствующим образом произвол функции $F(\zeta)$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов искомых функций:

$$2r_0\alpha_0 - \sum_{j=1}^{2}\left[(p_j - iq_j)A_1^{(j)} + (\bar{p}_j + i\bar{q}_j)\bar{A}_1^{(j)}\right] = -2\varepsilon^* + 2\int_{\gamma} \mathrm{Re}\,U^*\sigma^{-1}d\sigma,$$

$$\frac{g}{2h}\alpha_0 - \sum_{j=1}^{2}(1 + i\bar{\mu}_j)\bar{A}_1^{(j)} = \int_{\gamma} V^*\sigma^{-2}d\sigma + \Delta_2,$$

$$\sum_{j=1}^{2}(1 + i\mu_j)\bar{A}_2^{(j)} = -\int_{\gamma} V^*\sigma^{-3}d\sigma - \frac{1}{2}\Delta_2,$$

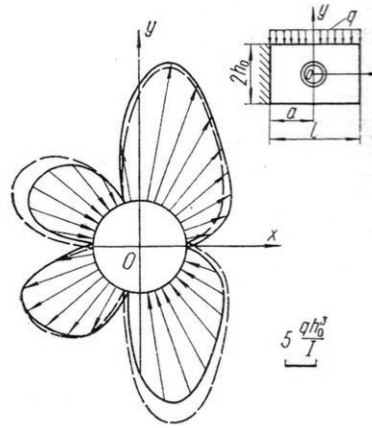


Рис. 1

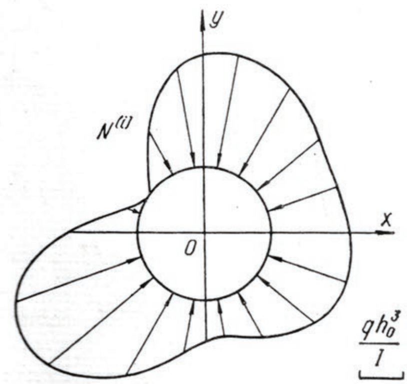


Рис. 2

$$\sum_{j=1}^{2}(\bar{p}_j + i\bar{q}_j)\bar{A}_2^{(j)} = -2\int_{\gamma} \mathrm{Re}\,U^*\sigma^{-2}d\sigma,$$

$$\frac{2r_0}{1-(n-1)^2}\left(1 + \frac{r_0}{\eta_c}\right)\alpha_{n-1} - \sum_{j=1}^{2}\left[(\bar{p}_j - i\bar{q}_j)\bar{A}_{n-2}^{(j)} + (\bar{p}_j + i\bar{q}_j)\bar{A}_n^{(j)}\right] =$$

$$= 2\int_{\gamma} \mathrm{Re}\,U^*\sigma^{-n}d\sigma, \qquad (10)$$

$$\frac{g(2-n)}{2h}\alpha_{n-1} - \sum_{j=1}^{2}(1 + i\bar{\mu}_j)\bar{A}_n^{(j)} = \int_{\gamma} V^*\sigma^{-n-1}d\sigma + \frac{\Delta_2}{n},$$

$$\frac{g}{2h}n\bar{\alpha}_{n-1} - \sum_{j=1}^{2}(1 + i\mu_j)A_{n-2}^{(j)} = \int_{\gamma} V^*\sigma^{n-3}d\sigma - \frac{\Delta_1}{n-2},$$

$$r_0\alpha_{n-2} = -i\eta_c(n-2)\beta_{n-2}, \quad n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

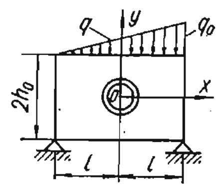
Функции U^* и V^* получаем из формул (3) заменой $\Phi_j(\zeta_j)$ на $\Phi_j^*(\zeta_j)$ $(j = 1, 2)$.

Нормальные напряжения σ^* в сечении стержня определяются по формуле

$$\sigma^* = E^*\left(\frac{r_0}{r}e_0 + i\,\frac{r - r_0}{r_1}\,\sigma\,\frac{d\theta_b}{d\sigma}\right), \qquad (11)$$

где r_1 — радиус кривизны того волокна, вдоль которого осуществляется контакт кольца и пластинки; r_0 — радиус кривизны нейтрального (для чистого изгиба) волокна стержня L_0, находящегося на расстоянии η_c от центральной оси.

Для числового примера рассмотрим ортотропную балку-пластинку, вид загружения и форма закрепления которой указаны на рисунках. Будем считать, что главные направления упругости материала пластинки параллельны осям выбранной системы координат (рис. 1—4). В качестве материала пластинки взят стеклотекстолит КАСТ-В (ГОСТ 10292-62) [4] и кольцо



прямоугольного поперечного сечения $F = 2h^* \times b$ из дюралюминия со следующими упругими и геометрическими параметрами: $E_1 = 2 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = 0{,}158$; $\nu_2 = 0{,}098$; $G = 4 \cdot 10^9$ Па; $E^* = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $h^*/h = 1$; $b/r_1 = 0{,}2$; $l/a = 4$; $l/h_0 = 10$; $r_1/h_0 = 0{,}25$.

На рис. 1, 2 представлены графики, характеризующие распреде-

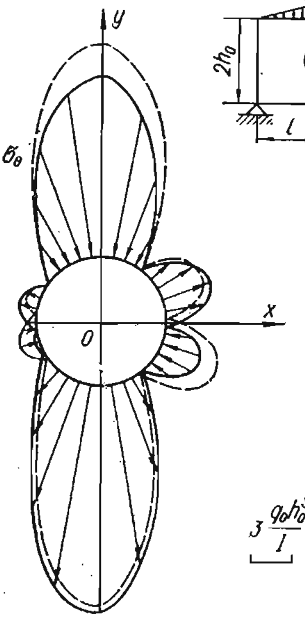


Рис. 3

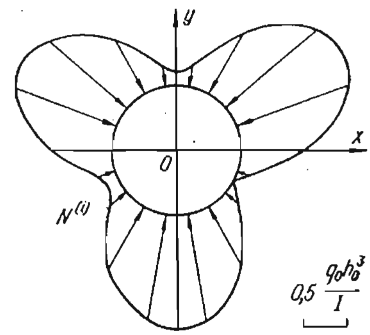


Рис. 4

ление кольцевых σ_θ и контактных $N^{(i)}$ напряжений вдоль контура отверстия в консольной балке при изгибе ее равномерно распределенной нагрузкой q при минимальной величине посадки $\dot{\varepsilon}_{\min}$.

На рис. 3, 4 построены графики распределения кольцевых и контактных напряжений около отверстия балки-пластинки на двух опорах при изгибе ее нормальной нагрузкой, распределенной по линейному закону $q = q_0 \dfrac{l + x}{2l}$ ($\varepsilon^* = \dot{\varepsilon}_{\min}$). Минимальная величина посадки кольца $\dot{\varepsilon}_{\min}$ определяется из условия $N^{(l)} \leqslant 0$ на контуре L. Штриховые линии на рисунках отвечают случаю свободного отверстия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М., Гостехиздат, 1957. 463 с.
2. *Мартынович Т. Л., Зварич М. К., Щукин В. С.* О напряженном состоянии анизотропной пластинки, в криволинейное отверстие которой впрессован замкнутый стержень.— Механика полимеров, 1976, № 2, с. 304—309.
3. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. М.— Л., Гостехиздат, 1951. 496 с.
4. *Физические* и механические свойства стеклопластиков. Справочник. Рига, «Зинатне», 1969. 266 с.

Львовский университет
Львовское отделение ВГПИ «Теплоэлектропроект»

Поступила в редколлегию 15.11 1977 г.